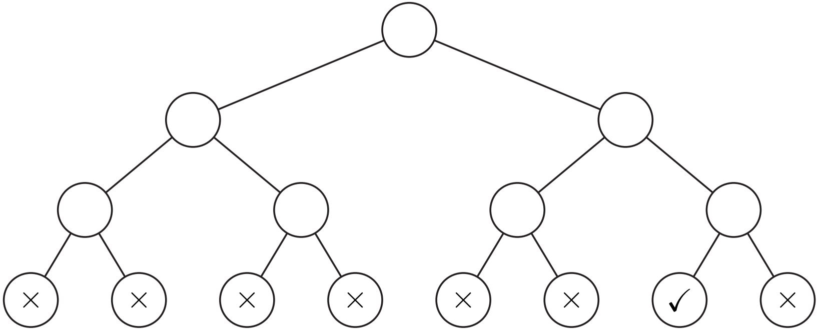
Alternujúce Turingove stroje

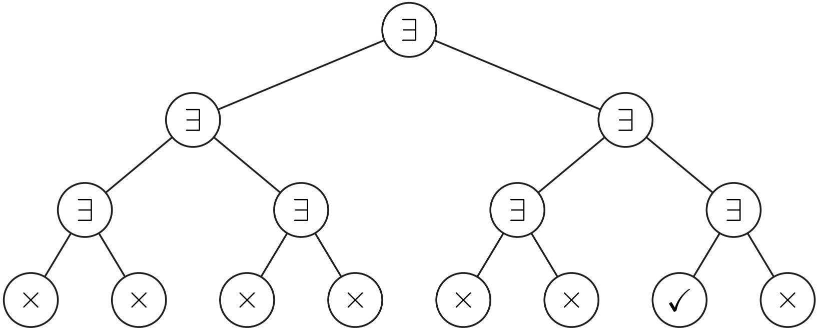
kuko

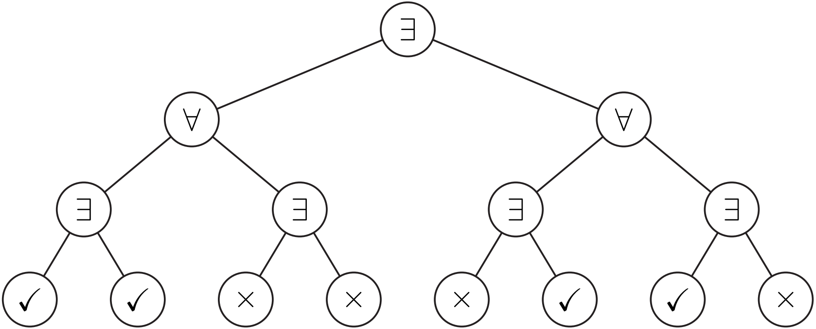
3.3.2021

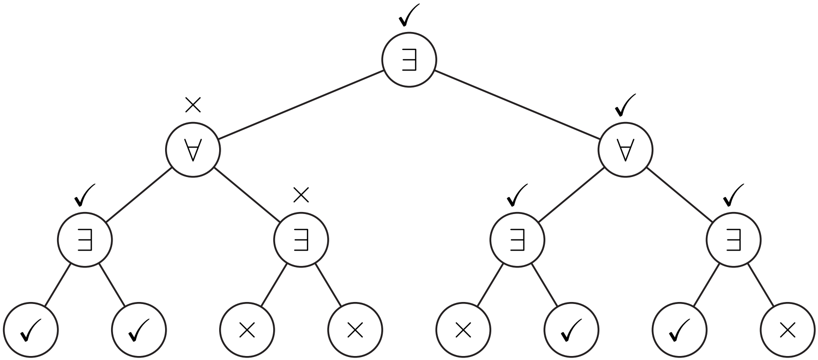
Pokročilá teória zložitosti

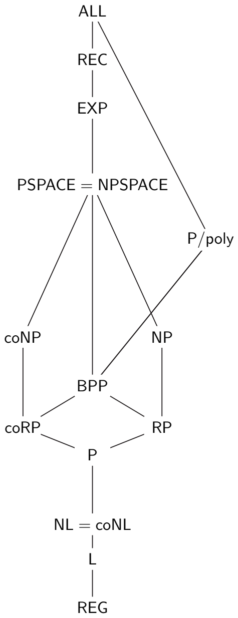
Alternácia










ALL
REC
EXP
PSPACE = NPSPACE
P/poly
coNP
NP
BPP
coRP
RP
P
NL = coNL
L
REG

- MIN-DNF – daná je formula ϕ a číslo k; existuje ekvivalentná formula veľkosti $\leq k$?
- 3-COLORING-EXTENSION – daný je graph G; dá sa každé 3-ofarbenie listov rozšíriť na 3-ofarbenie celého grafu?
- 1LTA-GRAMMAR-INEQUIVALENCE – dané sú bezkontextové gramatiky G_1 a G_2 nad 1-písmenovou abecedou; je $L(G_1) \neq L(G_2)$?
- VC-DIMENSION – daná je kolekcia $\mathscr{C} = \{S_1, S_2, \ldots\}$ podmnožín konečnej množiny U (S_i sú reprezentované úsporne booleovskými obvodmi); je $VC(\mathscr{C}) \geq k$? T.j. existuje $X \subseteq U$, $|X| \geq k$, $\forall S \subseteq X : \exists i : S = S_i \cap X$?

- MIN-DNF – daná je formula ϕ a číslo k; existuje ekvivalentná formula veľkosti $\leq k$?
- 3-COLORING-EXTENSION – daný je graph G; dá sa každé 3-ofarbenie listov rozšíriť na 3-ofarbenie celého grafu?
- 1LTA-GRAMMAR-INEQUIVALENCE – dané sú bezkontextové gramatiky G_1 a G_2 nad 1-písmenovou abecedou; je $L(G_1) \neq L(G_2)$?
- VC-DIMENSION – daná je kolekcia $\mathscr{C} = \{S_1, S_2, \dots\}$ podmnožín konečnej množiny U (S_i sú reprezentované úsporne booleovskými obvodmi); je $VC(\mathscr{C}) \geq k$? T.j. existuje $X \subseteq U$, $|X| \geq k$, $\forall S \subseteq X : \exists i : S = S_i \cap X$?

- Min-Dnf – daná je formula ϕ a číslo k; existuje ekvivalentná formula veľkosti $\leq k$?
- 3-Coloring-Extension – daný je graph G; dá sa každé 3-ofarbenie listov rozšíriť na 3-ofarbenie celého grafu?
- 1Lta-Grammar-Inequivalence – dané sú bezkontextové gramatiky G_1 a G_2 nad 1-písmenovou abecedou; je $L(G_1) \neq L(G_2)$?
- VC-Dimension – daná je kolekcia $\mathscr{C} = \{S_1, S_2, \ldots\}$ podmnožín konečnej množiny U (S_i sú reprezentované úsporne booleovskými obvodmi); je $VC(\mathscr{C}) \geq k$? T.j. existuje $X \subseteq U$, $|X| \geq k$, $\forall S \subseteq X : \exists i : S = S_i \cap X$?

- MIN-DNF – daná je formula ϕ a číslo k; existuje ekvivalentná formula veľkosti $\leq k$?
- 3-COLORING-EXTENSION – daný je graph G; dá sa každé 3-ofarbenie listov rozšíriť na 3-ofarbenie celého grafu?
- 1LTA-GRAMMAR-INEQUIVALENCE – dané sú bezkontextové gramatiky G_1 a G_2 nad 1-písmenovou abecedou; je $L(G_1) \neq L(G_2)$?
- VC-DIMENSION – daná je kolekcia $\mathscr{C} = \{S_1, S_2, \ldots\}$ podmnožín konečnej množiny U (S_i sú reprezentované úsporne booleovskými obvodmi); je $VC(\mathscr{C}) \geq k$? T.j. existuje $X \subseteq U$, $|X| \geq k$, $\forall S \subseteq X : \exists i : S = S_i \cap X$?

- Min-Dnf:

$$\exists \text{ formula } \psi$$
$$\forall \text{ ohodnotenie } x : \phi(x) = \psi(x)$$

- 3-Coloring-Extension:

$$\forall \text{ ofarbenie listov}$$
$$\exists \text{ ofarbenie grafu}$$

- 1Lta-Grammar-Inequivalence:

$$\exists \text{ slovo } w \text{ a odvodenie v } G_1 \text{ alebo } G_2$$
$$\forall \text{ odvodenie v tej druhej gramatike nedostaneme } w$$

- VC-Dimension:

$$\exists X\ \forall S\ \exists i \text{ také, že dačo platí}$$

- MIN-DNF:

$$\exists \text{ formula } \psi$$
$$\forall \text{ ohodnotenie } x : \phi(x) = \psi(x)$$

- 3-COLORING-EXTENSION:

$$\forall \text{ ofarbenie listov}$$
$$\exists \text{ ofarbenie grafu}$$

- 1LTA-GRAMMAR-INEQUIVALENCE:

$$\exists \text{ slovo } w \text{ a odvodenie v } G_1 \text{ alebo } G_2$$
$$\forall \text{ odvodenie v tej druhej gramatike nedostaneme } w$$

- VC-DIMENSION:

$$\exists X \ \forall S \ \exists i \text{ také, že dačo platí}$$

- MIN-DNF:

$$\exists \text{ formula } \psi$$
$$\forall \text{ ohodnotenie } x : \phi(x) = \psi(x)$$

- 3-COLORING-EXTENSION:

$$\forall \text{ ofarbenie listov}$$
$$\exists \text{ ofarbenie grafu}$$

- 1LTA-GRAMMAR-INEQUIVALENCE:

$$\exists \text{ slovo } w \text{ a odvodenie v } G_1 \text{ alebo } G_2$$
$$\forall \text{ odvodenie v tej druhej gramatike nedostaneme } w$$

- VC-DIMENSION:

$$\exists X\ \forall S\ \exists i \text{ také, že dačo platí}$$

- Min-Dnf:

$$\exists \text{ formula } \psi$$
$$\forall \text{ ohodnotenie } x : \phi(x) = \psi(x)$$

- 3-Coloring-Extension:

$$\forall \text{ ofarbenie listov}$$
$$\exists \text{ ofarbenie grafu}$$

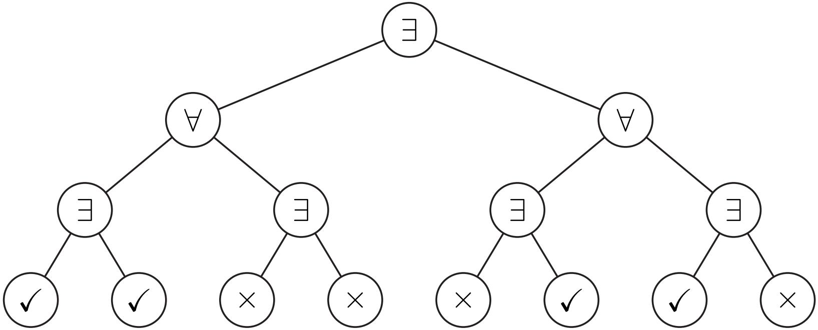
- 1Lta-Grammar-Inequivalence:

$$\exists \text{ slovo } w \text{ a odvodenie v } G_1 \text{ alebo } G_2$$
$$\forall \text{ odvodenie v tej druhej gramatike nedostaneme } w$$

- VC-Dimension:

$$\exists X \ \forall S \ \exists i \text{ také, že dačo platí}$$


A B C D E F G H



Definícia (ATS)

Alternujúci Turingov stroj je 7-ica $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, typ)$, *kde*

$$\delta(q, a) \subseteq Q \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\}$$

$$typ : Q \rightarrow \{\exists, \forall\}.$$

Definícia (ATIME, ASPACE)

Nech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je funkcia. Hovoríme, že alternujúci stroj pracuje v čase/pamäti $f(n)$, ak každý výpočet na každom slove x zaberie čas/pamäť $f(|x|)$. Definujeme $\mathrm{ATIME}(f(n))$ *a* $\mathrm{ASPACE}(f(n))$ *ako triedy jazykov rozhodnuteľných na alternujúcom Turingovom stroji v čase, respekíve priestore $O(f(n))$.* Špeciálne

- $\mathrm{AL} = \mathrm{ASPACE}(\log n)$ – *alternujúci logaritmický priestor,*
- $\mathrm{AP} = \bigcup_k \mathrm{ATIME}(n^k)$ – *alternujúci polynomiálny čas,*
- $\mathrm{APSPACE} = \bigcup_k \mathrm{ASPACE}(n^k)$ – *alternujúci polynomiálny priestor,*
- $\mathrm{AEXP} = \bigcup_k \mathrm{ATIME}(2^{n^k})$ – *alternujúci exponenciálny čas.*

Definícia (ATIME, ASPACE)

Nech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je funkcia. Hovoríme, že alternujúci stroj pracuje v čase/pamäti $f(n)$, ak každý výpočet na každom slove x zaberie čas/pamäť $f(|x|)$. Definujeme $\mathrm{ATIME}(f(n))$ *a* $\mathrm{ASPACE}(f(n))$ *ako triedy jazykov rozhodnuteľných na alternujúcom Turingovom stroji v čase, respekíve priestore $O(f(n))$. Špeciálne*

- $\mathrm{AL} = \mathrm{ASPACE}(\log n)$ – *alternujúci logaritmický priestor,*
- $\mathrm{AP} = \bigcup_k \mathrm{ATIME}(n^k)$ – *alternujúci polynomiálny čas,*
- $\mathrm{APSPACE} = \bigcup_k \mathrm{ASPACE}(n^k)$ – *alternujúci polynomiálny priestor,*
- $\mathrm{AEXP} = \bigcup_k \mathrm{ATIME}(2^{n^k})$ – *alternujúci exponenciálny čas.*

- Aká je sila alternovania?
- Aká veľká je trieda AP?
- Aká veľká je trieda AL?

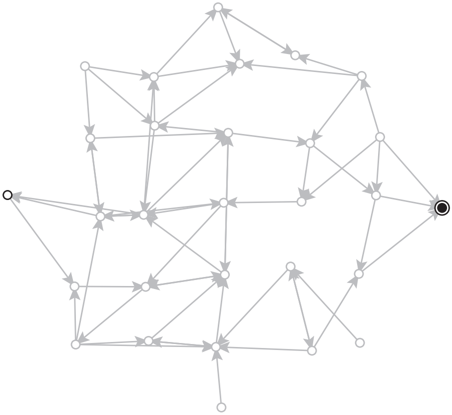
$$\mathrm{P} \subseteq NP \subseteq \mathrm{AP}$$

AP $\subseteq$ PSPACE

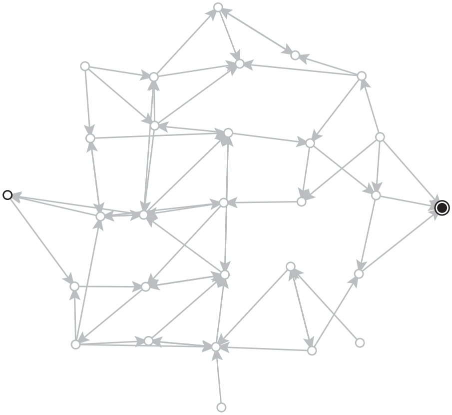
$$\mathrm{QBF} \in \mathsf{AP}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{AP}$$



- $\exists$ cesta z A do B na k krokov?
- paralelne vyskúšaj všetky M ($\exists$) a rekurzívne zisti, či $\exists$ cesta z A do M a zároveň ($\forall$) cesta z M do B na $k/2$ krokov

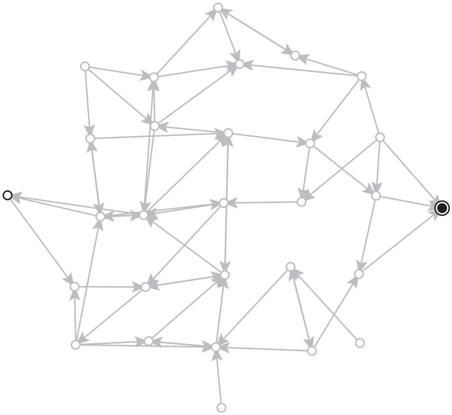


- $\exists$ cesta z A do B na k krokov?
- paralelne vyskúšaj všetky M ($\exists$) a rekurzívne zisti, či $\exists$ cesta z A do M a zároveň ($\forall$) cesta z M do B na $k/2$ krokov

- Aká veľká je trieda AL?

$$\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} \subseteq \mathsf{AL}$$

$$\mathsf{AL} \subseteq \mathsf{P}$$



- pamäť $s \implies 2^{O(s)}$ možných konfigurácií

$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{AL}$

⊢	→ a	b	b	a	⊣
⊢	␣	$\vec{a}$ b	b	a	⊣
⊢	␣	b	$\vec{a}$ b	a	⊣
⊢	␣	b	b	$\vec{a}$ a	⊣
⊢	␣	b	b	a	$\vec{a}$ ⊣
⊢	␣	b	b	a a	⊣
⊢	␣	b	← b	␣	⊣
⊢	␣	← b	b	␣	⊣
⊢	← ␣	b	b	␣	⊣
⊢	␣	→ b	b	␣	⊣
⊢	␣	␣	$\vec{b}$ b	␣	⊣
⊢	␣	␣	b	$\vec{b}$ ␣	⊣
⊢	␣	␣	b b	␣	⊣
⊢	␣	← ␣	␣	␣	⊣
⊢	␣	␣	→ ␣	␣	⊣
⊢	␣	␣	␣	a ␣	⊣
⊢	␣	␣	␣	␣	a ⊣
⊢	␣	␣	␣	␣	A ⊣

- test(i,j,x) – je v i-tom kroku na j-tom políčku hodnota x?
- tipni si políčka $j-1, j, j+1$ v predchádzajúcom kroku $i-1$ ($\exists$) a rekurzívne ($\forall$) zavolaj test

⊢	→ a	b	b	a	⊣
⊢	␣	$\vec{a}$ b	b	a	⊣
⊢	␣	b	$\vec{a}$ b	a	⊣
⊢	␣	b	b	$\vec{a}$ a	⊣
⊢	␣	b	b	a	$\vec{a}$ ⊣
⊢	␣	b	b	a a	⊣
⊢	␣	b	← b	␣	⊣
⊢	␣	← b	b	␣	⊣
⊢	← ␣	b	b	␣	⊣
⊢	␣	→ b	b	␣	⊣
⊢	␣	␣	$\vec{b}$ b	␣	⊣
⊢	␣	␣	b	$\vec{b}$ ␣	⊣
⊢	␣	␣	b b	␣	⊣
⊢	␣	← ␣	␣	␣	⊣
⊢	␣	␣	→ ␣	␣	⊣
⊢	␣	␣	␣	a ␣	⊣
⊢	␣	␣	␣	␣	a ⊣
⊢	␣	␣	␣	␣	A ⊣

- test(i, j, x) – je v i-tom kroku na j-tom políčku hodnota x?
- tipni si políčka $j-1, j, j+1$ v predchádzajúcom kroku $i-1$ ($\exists$) a rekurzívne ($\forall$) zavolaj test

$\vdash$	$\overset{\rightarrow}{\texttt{a}}$	$\texttt{b}$	$\texttt{b}$	$\texttt{a}$	$\dashv$
$\vdash$	␣	$\overset{\vec{\texttt{a}}}{\texttt{b}}$	$\texttt{b}$	$\texttt{a}$	$\dashv$
$\vdash$	␣	$\texttt{b}$	$\overset{\vec{\texttt{a}}}{\texttt{b}}$	$\texttt{a}$	$\dashv$
$\vdash$	␣	$\texttt{b}$	$\texttt{b}$	$\overset{\vec{\texttt{a}}}{\texttt{a}}$	$\dashv$
$\vdash$	␣	$\texttt{b}$	$\texttt{b}$	$\texttt{a}$	$\overset{\vec{\texttt{a}}}{\dashv}$
$\vdash$	␣	$\texttt{b}$	$\texttt{b}$	$\overset{\texttt{a}}{\texttt{a}}$	$\dashv$
$\vdash$	␣	$\texttt{b}$	$\overset{\leftarrow}{\texttt{b}}$	␣	$\dashv$
$\vdash$	␣	$\overset{\leftarrow}{\texttt{b}}$	$\texttt{b}$	␣	$\dashv$
$\vdash$	$\overset{\leftarrow}{␣}$	$\texttt{b}$	$\texttt{b}$	␣	$\dashv$
$\vdash$	␣	$\overset{\rightarrow}{\texttt{b}}$	$\texttt{b}$	␣	$\dashv$
$\vdash$	␣	␣	$\overset{\vec{\texttt{b}}}{\texttt{b}}$	␣	$\dashv$
$\vdash$	␣	␣	$\texttt{b}$	$\overset{\vec{\texttt{b}}}{␣}$	$\dashv$
$\vdash$	␣	␣	$\overset{\texttt{b}}{\texttt{b}}$	␣	$\dashv$
$\vdash$	␣	$\overset{\leftarrow}{␣}$	␣	␣	$\dashv$
$\vdash$	␣	␣	$\overset{\rightarrow}{␣}$	␣	$\dashv$
$\vdash$	␣	␣	␣	$\overset{a}{␣}$	$\dashv$
$\vdash$	␣	␣	␣	␣	$\overset{a}{\dashv}$
$\vdash$	␣	␣	␣	␣	$\overset{A}{\dashv}$

- test(i,j,x) – je v i-tom kroku na j-tom políčku hodnota x?
- tipni si políčka $j-1, j, j+1$ v predchádzajúcom kroku $i-1$ ($\exists$) a rekurzívne ($\forall$) zavolaj test

⊢	$\rightarrow$ a	b	b	a	⊣
⊢	␣	$\vec{a}$ b	b	a	⊣
⊢	␣	b	$\vec{a}$ b	a	⊣
⊢	␣	b	b	$\vec{a}$ a	⊣
⊢	␣	b	b	a	$\vec{a}$ ⊣
⊢	␣	b	b	a a	⊣
⊢	␣	b	$\leftarrow$ b	␣	⊣
⊢	␣	$\leftarrow$ b	b	␣	⊣
⊢	$\leftarrow$ ␣	b	b	␣	⊣
⊢	␣	$\boxed{\rightarrow \text{b}}$	b	␣	⊣
⊢	␣	␣	$\vec{b}$ b	␣	⊣
⊢	␣	␣	b	$\vec{b}$ ␣	⊣
⊢	␣	␣	b b	␣	⊣
⊢	␣	$\leftarrow$ ␣	␣	␣	⊣
⊢	␣	␣	$\rightarrow$ ␣	␣	⊣
⊢	␣	␣	␣	a ␣	⊣
⊢	␣	␣	␣	␣	a ⊣
⊢	␣	␣	␣	␣	A ⊣

- test(i,j,x) – je v i-tom kroku na j-tom políčku hodnota x?
- tipni si políčka $j-1, j, j+1$ v predchádzajúcom kroku $i-1$ ($\exists$) a rekurzívne ($\forall$) zavolaj test

⊢	$\vec{a}$	b	b	a	⊣
⊢	␣	$\overset{\vec{a}}{b}$	b	a	⊣
⊢	␣	b	$\overset{\vec{a}}{b}$	a	⊣
⊢	␣	b	b	$\overset{\vec{a}}{a}$	⊣
⊢	␣	b	b	a	$\overset{\vec{a}}{⊣}$
⊢	␣	b	b	$\overset{a}{a}$	⊣
⊢	␣	b	$\overset{\leftarrow}{b}$	␣	⊣
⊢	␣	$\overset{\leftarrow}{b}$	b	␣	⊣
⊢	$\overset{\leftarrow}{␣}$	b	b	␣	⊣
⊢	␣	$\vec{b}$	b	␣	⊣
⊢	␣	␣	$\overset{\vec{b}}{b}$	␣	⊣
⊢	␣	␣	b	$\overset{\vec{b}}{␣}$	⊣
⊢	␣	␣	$\overset{b}{b}$	␣	⊣
⊢	␣	$\overset{\leftarrow}{␣}$	␣	␣	⊣
⊢	␣	␣	$\overset{\rightarrow}{␣}$	␣	⊣
⊢	␣	␣	␣	$\overset{a}{␣}$	⊣
⊢	␣	␣	␣	␣	$\overset{a}{⊣}$
⊢	␣	␣	␣	␣	$\overset{A}{⊣}$

- test(i,j,x) – je v i-tom kroku na j-tom políčku hodnota x?
- tipni si políčka $j-1, j, j+1$ v predchádzajúcom kroku $i-1$ ($\exists$) a rekurzívne ($\forall$) zavolaj test

Veta

Pre $t(n) \geq n$, $s(n) \geq \log n$ časovo/páskovo konštruovateľné platí

- $\mathrm{ATIME}(t(n)) \subseteq \mathrm{DSPACE}(t(n))$, *(rek. vyhodnocujeme strom výpočtov)*
- $\mathrm{DSPACE}(s(n)) \subseteq \mathrm{ATIME}(s(n)^2)$, *(„paralelný Savitch")*
- $\mathrm{ASPACE}(s(n)) \subseteq DTIME(2^{O(s(n))})$, *(prehľ. grafu konfigurácií)*
- $DTIME(t(n)) \subseteq \mathrm{ASPACE}(\log t(n))$. *(„paralelný Cook-Levin")*

Veta

Pre $t(n) \geq n$*,* $s(n) \geq \log n$ *časovo/páskovo konštruovateľné platí*

- $\mathrm{ATIME}(t(n)) \subseteq \mathrm{DSPACE}(t(n))$, *(rek. vyhodnocujeme strom výpočtov)*
- $\mathrm{DSPACE}(s(n)) \subseteq \mathrm{ATIME}(s(n)^2)$, *(„paralelný Savitch“)*
- $\mathrm{ASPACE}(s(n)) \subseteq DTIME(2^{O(s(n))})$, *(prehľ. grafu konfigurácií)*
- $DTIME(t(n)) \subseteq \mathrm{ASPACE}(\log t(n))$. *(„paralelný Cook-Levin“)*

Veta

Pre $t(n) \geq n$, $s(n) \geq \log n$ *časovo/páskovo konštruovateľné platí*

- $\mathrm{ATIME}(t(n)) \subseteq \mathrm{DSPACE}(t(n))$, *(rek. vyhodnocujeme strom výpočtov)*
- $\mathrm{DSPACE}(s(n)) \subseteq \mathrm{ATIME}(s(n)^2)$, *(„paralelný Savitch")*
- $\mathrm{ASPACE}(s(n)) \subseteq DTIME(2^{O(s(n))})$, *(prehľ. grafu konfigurácií)*
- $DTIME(t(n)) \subseteq \mathrm{ASPACE}(\log t(n))$. *(„paralelný Cook-Levin")*

Veta

Pre $t(n) \geq n$, $s(n) \geq \log n$ *časovo/páskovo konštruovateľné platí*

- $\mathrm{ATIME}(t(n)) \subseteq \mathrm{DSPACE}(t(n))$, *(rek. vyhodnocujeme strom výpočtov)*
- $\mathrm{DSPACE}(s(n)) \subseteq \mathrm{ATIME}(s(n)^2)$, *(„paralelný Savitch“)*
- $\mathrm{ASPACE}(s(n)) \subseteq DTIME(2^{O(s(n))})$, *(prehľ. grafu konfigurácií)*
- $DTIME(t(n)) \subseteq \mathrm{ASPACE}(\log t(n))$. *(„paralelný Cook-Levin“)*

Dôsledok

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{L} & \subseteq & \mathrm{P} & \subseteq & \mathrm{PSPACE} & \subseteq & \mathrm{EXP} & \subseteq & \mathrm{EXPSPACE} & \subseteq \cdots \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
 & & \mathrm{AL} & \subseteq & \mathrm{AP} & \subseteq & \mathrm{APSPACE} & \subseteq & \mathrm{AEXP} & \subseteq \cdots
\end{array}$$