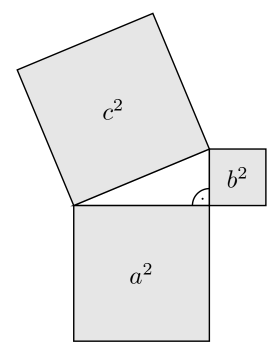
Kapitola 1

Pytagorova veta

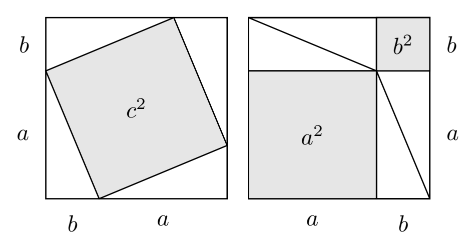


Pytagorovu vetu

$$a^2 + b^2 = c^2$$

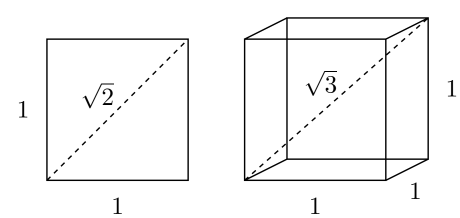
sa učia „recitovať" deti na celom svete. Čo hovorí táto veta? Tvrdí, že ak v *pravouhlom* trojuholníku nakreslíme nad každou stranou štvorec tak, ako je to na obrázku vpravo, Pytagorova veta tak dva menšie štvorce budú mať dokopy rovnaký obsah, ako veľký štvorec.

Ak označíme strany pravouhlého trojuholníka tradične písmenami a, b, c, pričom c je prepona – najdlhšia strana, tá oproti pravému uhlu – tak vetu môžeme naozaj[1] veľmi stručne formulovať ako $a^2 + b^2 = c^2$ (pozri obrázok vpravo).



■ **Dôkaz.** Zoberme štyri kópie nášho trojuholníka a naskladajme ich dvoma spôsobmi tak, ako na obrázku vpravo. V oboch prípadoch sa ľahko ukáže, že výsledkom je štvorec so stranou dĺžky $a+b$. Obsah týchto štvorcov je zjavne rovnaký a ak si odmyslíme štyri trojuholníky, dostávame, že veľký štvorec má rovnaký obsah ako dva menšie dokopy. □

Aplikácie Pytagorovej vety

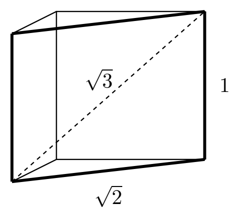


Význam Pytagorovej vety spočíva v tom, že ak poznáme dve strany pravouhlého trojuholníka, vieme dopočítať tretiu!

Napríklad: Aká dlhá je uhlopriečka štvorca so stranou 1? Ak za a, b do Pytagorovej vety dosadíme 1, zistíme, že $c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$, teda $c = \sqrt{2}$ – uhlopriečka jednotkového štvorca má dĺžku $\sqrt{2}$. Úžasné pritom je, že $\sqrt{2}$ vieme ľahko narysovať, zatiaľčo hodnota $\sqrt{2} \approx 1.414213562\ldots$ sa nedá presne vyčísliť (viac o tom

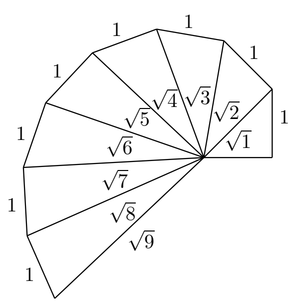
[1]obsah štvorca so stranou dĺžky x je x^2

v kapitole 4 Niektoré iracionálne čísla). Vidíme teda, že pomocou kružidla a pravítka vieme narysovať aj také dĺžky, ktoré nevieme presne vyčísliť.



A aká dlhá je telesová uhlopriečka jednotkovej kocky? Opäť pomôže Pytagorova veta! Rozrežme kocku tak, ako na obrázku vľavo. Ak sa pozrieme na tento prierez, zistíme, že sme dostali obdĺžnik so stranami 1 (čo je strana kocky) a $\sqrt{2}$ (čo je stranová uhlopriečka, ktorej dĺžku sme práve vypočítali). Uhlopriečka v tomto obdĺžniku je naša telesová uhlopriečka a platí: $c^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$, teda $c = \sqrt{3}$. (Číslo $\sqrt{3}$ sa tiež nedá vyčísliť presne.)

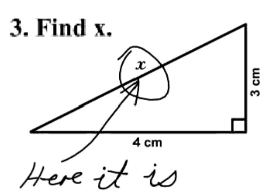
Mimochodom, ak by sme takto pokračovali ďalej, mohli by sme dokázať, že uhlopriečka n-rozmernej kocky (so stranou 1) má dĺžku $\sqrt{n}$. (Populárne sa to dá povedať aj takto: keby sme mali n-rozmernú krabičku so stranou 1cm; tak pre dosť veľké n do nej vieme aj zaparkovať auto.)



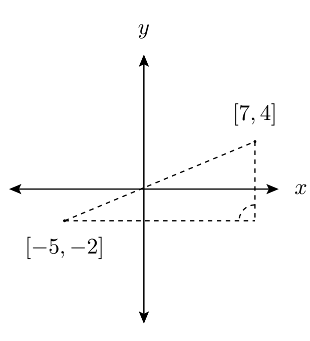
Videli sme, že pravítkom a kružidlom vieme zostrojiť napríklad $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$. Vedeli by sme zostrojiť odmocninu z ľubovoľného prirodzeného čísla?

Odpoveď je áno; jeden spôsob, ako sa to dá urobiť je na obrázku vľavo – budeme postupne vytvárať trojuholníky so stranou 1. Vždy, keď chceme nakresliť ďalší, stačí nakresliť kolmicu na preponu posledného trojuholníka (dĺžky 1) a spojiť ju so stredom. Presvedčte sa, že z Pytagorovej vety vyplýva, že ak mala posledná prepona dĺžku $\sqrt{n}$, tak nasledujúca bude mať dĺžku $\sqrt{n+1}$. (Teda naozaj vieme narysovať odmocninu z ľubovoľného prirodzeného čísla.)

Počítanie vzdialenosti



Vedieť z dvoch strán dopočítať dĺžku tretej asi nevyzerá príliš vzrušujúco. Na druhej strane, predstavte si, že na počítači hráte nejakú hru. Ako počítač zistí, či sa dva objekty (pre jednoduchosť gule) zrazili? Nuž zrazia sa vtedy, keď sú príliš blízko seba (presnejšie ich stredy sú vzdialené menej ako nejaká kritická vzdialenosť – súčet ich polomerov). Ale ako počítač zistí, *ako ďaleko* od seba sa nachádzajú?



Väčšinou sú známe súradnice oboch objektov. Napríklad prvý má stred v bode $[-5,-2]$, druhý v bode $[7,3]$. Ako z týchto štyroch čísel zistíme vzdialenosť oboch bodov?

Stačí si uvedomiť, že pracujeme v pravouhlej súradnicovej sústave a dokresliť si pravouhlý trojuholník ako na obrázku. Strany majú dĺžky 12 a 5 – rozdiel x-ových a rozdiel y-ových súradníc. Vzdialenosť je dĺžka prepony tohto trojuholníka a dopočítame ju z Pytagorovej vety: $12^2 + 5^2 = 169 = 13^2$, teda vzdialenosť je 13. Vo všeobecnosti sa vzdialenosť bodov $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$ vypočíta podľa vzorca

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Vzdialenosť bodov $[x_1, y_1, z_1]$ a $[x_2, y_2, z_2]$ v 3-rozmernom priestore sa vypočíta analogicky

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Opäť sa na úlohu môžeme pozrieť ako na hľadanie telesovej uhlopriečky nejakého kvádra.