Fibonacci, Tribonacci, matice a vlastné čísla

kuko

na Blahoslava 2013

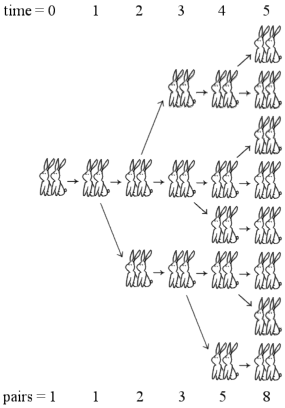
Pravdepodobnostné algoritmy

Fibonacciho čísla

Fibonacciho čísla

- $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$:

$$\ldots, -8, 5, -3, 2, -1, 1, \mathbf{0}, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$



Fibonacciho čísla

- $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$:
$$\dots, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$
- možno ste počuli, že
$$f_n = \frac{\varphi^n - \hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$$
- možno ste počuli, že
$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$$
- viete, koľko je
$$\lim_{n\to-\infty} f_{n+1}/f_n = ?$$

Fibonacciho čísla

- $(f_n, f_{n+1}) \mapsto (f_{n+1}, f_{n+2}) = (f_{n+1}, f_n + f_{n+1})$
- táto transformácia je lineárna:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$$

Fibonacciho čísla

- $(f_n, f_{n+1}) \mapsto (f_{n+1}, f_{n+2}) = (f_{n+1}, f_n + f_{n+1})$
- táto transformácia je lineárna:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$$

Fibonacciho čísla

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+2} \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}$$

Fibonacciho čísla

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+2} \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}$$

Násobenie maticou

- čo to znamená "násobenie maticou"?
  - roztiahnutie/otočenie/preklopenie/skosenie/projekcia/...
- ako "vyzerá" násobenie maticou Q?

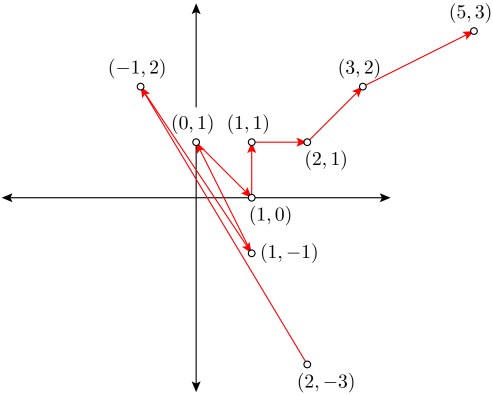
Násobenie maticou

- čo to znamená "násobenie maticou"?
  - roztiahnutie/otočenie/preklopenie/skosenie/projekcia/...
- ako "vyzerá" násobenie maticou Q?

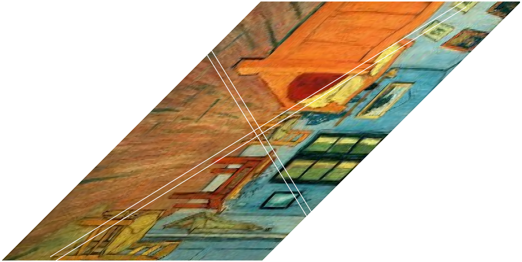
Násobenie maticou

- čo to znamená "násobenie maticou"?
  - roztiahnutie/otočenie/preklopenie/skosenie/projekcia/...
- ako "vyzerá" násobenie maticou Q?

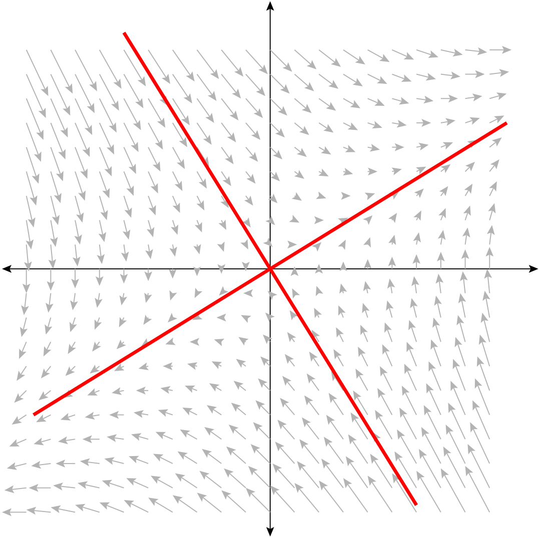
Násobenie maticou Q



Násobenie maticou Q



Násobenie maticou Q



Vlastné čísla

- $Av = \lambda v$
- vektor v, ktorý sa pri násobení A iba natiahne, ale **nezmení smer**, voláme *vlastný vektor* matice A
- λ je príslušné vlastné číslo
- vlastné vektory sa dajú vybrať tak, že sú na seba kolmé a dĺžky 1!

Vlastné čísla

- $Av = \lambda v$
- vektor v, ktorý sa pri násobení A iba natiahne, ale **nezmení smer**, voláme *vlastný vektor* matice A
- λ je príslušné vlastné číslo
- vlastné vektory sa dajú vybrať tak, že sú na seba kolmé a dĺžky 1!

Vlastné čísla

- $Av = \lambda v$
- vektor v, ktorý sa pri násobení A iba natiahne, ale **nezmení smer**, voláme *vlastný vektor* matice A
- λ je príslušné vlastné číslo
- vlastné vektory sa dajú vybrať tak, že sú na seba kolmé a dĺžky 1!

Vlastné čísla

- $Av = \lambda v$
- vektor v, ktorý sa pri násobení A iba natiahne, ale **nezmení smer**, voláme *vlastný vektor* matice A
- λ je príslušné vlastné číslo
- vlastné vektory sa dajú vybrať tak, že sú na seba kolmé a dĺžky 1!

Vlastné čísla

- matica Q má dva vlastné vektory:

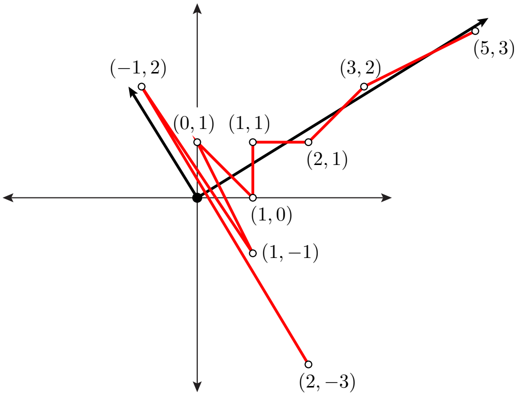
$$v_1 = \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ 1 \end{pmatrix},$$

  kde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

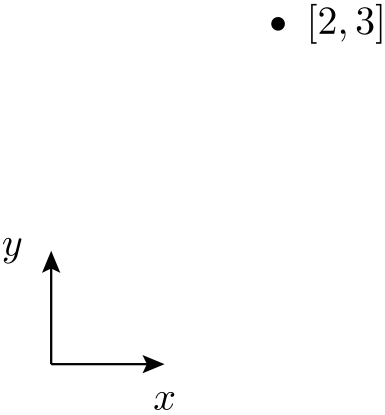
- zodpovedajúce vlastné čísla sú

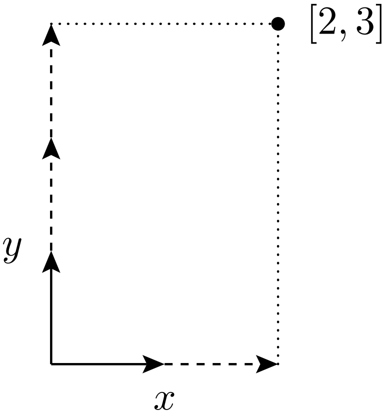
$$\lambda_1 = \varphi \approx 1.61803, \qquad \lambda_2 = \hat{\varphi} \approx -0.61803$$

Násobenie maticou Q

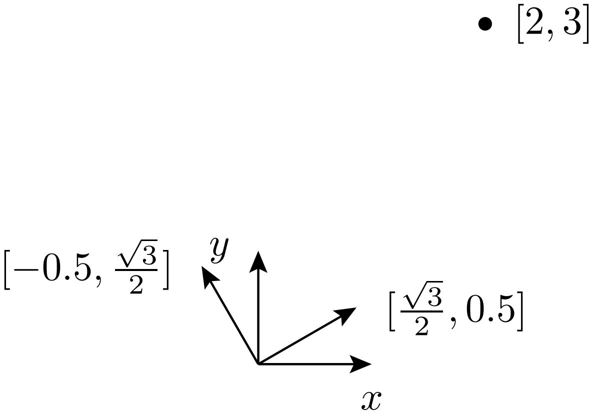


Zmena súradnicovej sústavy

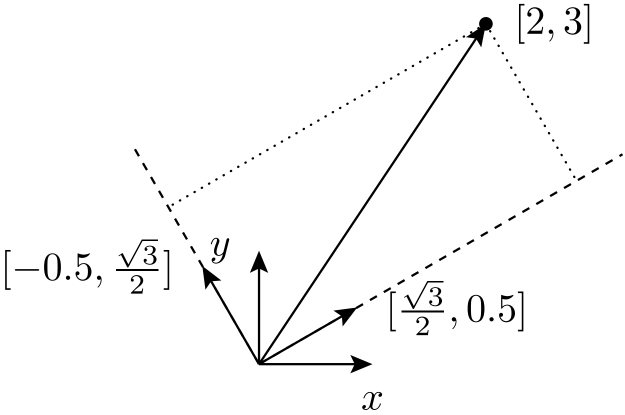



[2, 3]
y
x

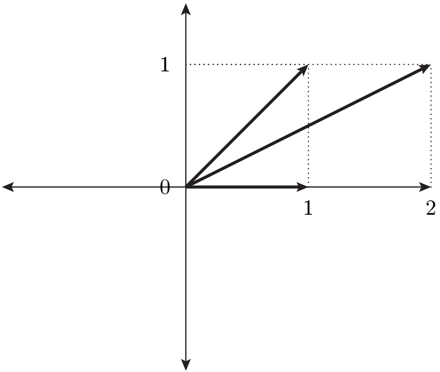
Zmena súradnicovej sústavy



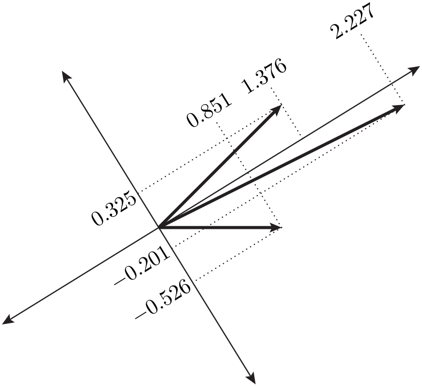
Zmena súradnicovej sústavy



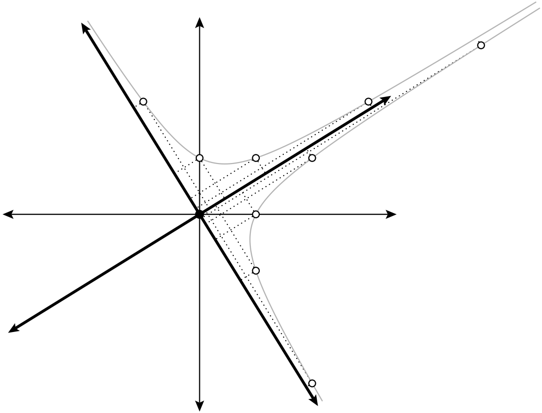
Zmena súradnicovej sústavy



Zmena súradnicovej sústavy



Zmena súradnicovej sústavy



Zmena súradnicovej sústavy

- ak máme vektory, ktoré sú na seba kolmé, dĺžky 1 (tvoria *ortonormálnu bázu*),
  súradnice bodu = dĺžka tieňa, ktorý vrhá na bázu
  – dá sa spočítať skalárnym súčinom
- mimochodom, vektory $v_1, \ldots, v_n$ sú navzájom kolmé, dĺžky 1 vtedy, keď

$$\begin{pmatrix} — & v_1^T & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & v_n^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = I$$

teda

$$PP^T = P^T P = I \qquad \text{a} \qquad P^{-1} = P^T$$

Zmena súradnicovej sústavy

- ak máme vektory, ktoré sú na seba kolmé, dĺžky 1 (tvoria *ortonormálnu bázu*), súradnice bodu = dĺžka tieňa, ktorý vrhá na bázu – dá sa spočítať skalárnym súčinom
- mimochodom, vektory $v_1, \dots, v_n$ sú navzájom kolmé, dĺžky 1 vtedy, keď

$$\begin{pmatrix} — & v_1^T & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & v_n^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = I$$

teda

$$PP^T = P^T P = I \qquad \text{a} \qquad P^{-1} = P^T$$

Spektrálna dekompozícia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} — & v_1^T & — \\ — & v_2^T & — \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$Q = P\Lambda P^{-1}$$

$$Q^n = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) = (P\Lambda^n P^{-1}) = P \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \hat{\varphi}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$Q = P\Lambda P^{-1}$$

$$f_n = f_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}$$

- keďže $|\lambda_2| < 1$,

$$|\lambda_2|^n \to 0 \qquad \text{a} \qquad f_n \sim \lambda_1^n/\sqrt{5}$$

Spektrálna dekompozícia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} — & v_1^T & — \\ — & v_2^T & — \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$Q = P\Lambda P^{-1}$$

$$Q^n = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) = (P\Lambda^n P^{-1}) = P \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \hat{\varphi}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$Q = P\Lambda P^{-1}$$

$$f_n = f_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}$$

- keďže $|\lambda_2| < 1$,

$$|\lambda_2|^n \to 0 \qquad \text{a} \qquad f_n \sim \lambda_1^n/\sqrt{5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} — & v_1^T & — \\ — & v_2^T & — \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$Q = P\Lambda P^{-1}$$

$$Q^n = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) = (P\Lambda^n P^{-1}) = P\begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \hat{\varphi}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$Q = P\Lambda P^{-1}$$

$$f_n = f_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}$$

- keďže $|\lambda_2| < 1$,

$$|\lambda_2|^n \to 0 \qquad \text{a} \qquad f_n \sim \lambda_1^n/\sqrt{5}$$

Spektrálna dekompozícia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} - & v_1^T & - \\ - & v_2^T & - \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$Q = P\Lambda P^{-1}$$

$$Q^n = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) = (P\Lambda^n P^{-1}) = P \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \hat{\varphi}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$Q = P\Lambda P^{-1}$$

$$f_n = f_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}$$

- keďže $|\lambda_2| < 1$,

$$|\lambda_2|^n \to 0 \qquad \text{a} \qquad f_n \sim \lambda_1^n / \sqrt{5}$$

Tribonacciho čísla

Tribonacciho čísla

- $t_0 = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = 1$
- $t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n$:

$$\ldots, 1, -3, 2, 0, -1, 1, \mathbf{0}, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \ldots$$

Tribonacciho čísla

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} t_{n+2} \\ t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{n+3} \\ t_{n+2} \\ t_{n+1} \end{pmatrix}$$

- ako vyzerá násobenie maticou T?

Vlastné čísla T

- $\lambda_1 \approx 1.83929$
- $\lambda_2 \approx -0.419643 + 0.606291i$
- $\lambda_3 \approx -0.419643 - 0.606291i$
- $v_1 \approx (3.38298, 1.83929, 1)$
- $v_2 \approx (-0.191488 - 0.508852i, -0.419643 + 0.606291i, 1)$
- $v_3 \approx (-0.191488 + 0.508852i, -0.419643 - 0.606291i, 1)$
- $t_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n + c_3 \cdot \lambda_3^n$ pre vhodné c_1, c_2, c_3

Vlastné čísla T

- keďže $|\lambda_2|, |\lambda_3| < 1$,

$$|\lambda_2|^n, |\lambda_3|^n \to 0$$

$$t_n \sim c_1 \cdot \lambda_1^n$$

- $c_1 \approx 0.1828$, $\lambda_1 \approx 1.83929$