

Óda na abstrakciu

Kubo Kováč

Klub Trojstenu, 8. 12. 2012

Pytagorova veta

Pytagorova veta

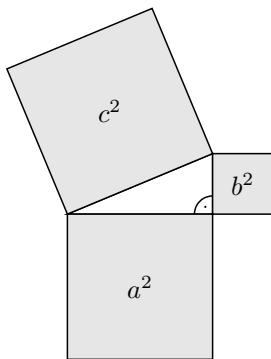


Figure: Pytagorova veta: Súčet obsahov štvorcov nad odvesnami sa rovná obsahu štvorca nad preponou.

Dôkaz Pytagorovej vety

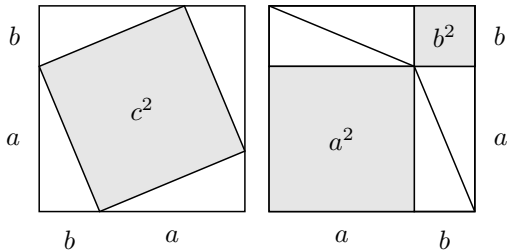


Figure: Štvorec so stranou $a+b$ sa dá rozložiť na $c^2 + 4$ trojuholníky a tiež na $a^2 + b^2 + 4$ trojuholníky.

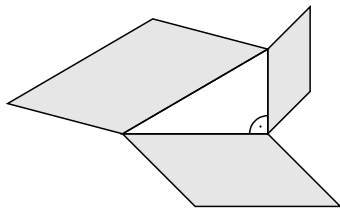


Figure: Pappova veta: Obsah dvoch menších rovnobežníkov sa rovná obsahu rovnobežníka nad preponou.

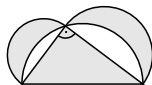


Figure: Hippokratove mesiačky: Obsah dvoch mesiačikov je rovný obsahu trojuholníka.

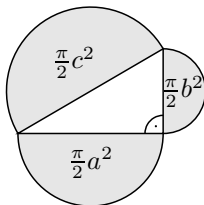


Figure: Hippokratove mesiačky a Pytagorova veta?

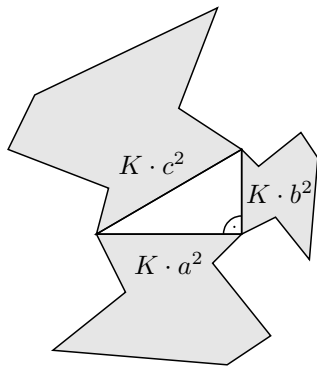


Figure: Obsah dvoch pračudesných obsahov je rovný obsahu toho nad preponou.

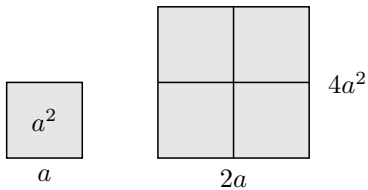


Figure: Štvorec s 2-násobnou stranou má 4-násobný obsah!

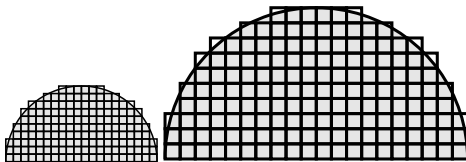


Figure: A podobne to platí aj pre iné útvary.

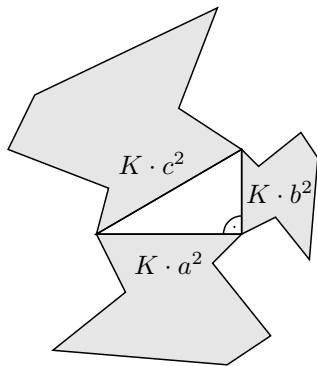


Figure: Obsah dvoch pračudesných obsahov je rovný obsahu toho nad preponou.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$K \cdot (a^2 + b^2) = K \cdot c^2$$



$$K \cdot a^2 + K \cdot b^2 = K \cdot c^2$$

pre $K \neq 0$

Dôkaz Pytagorovej vety

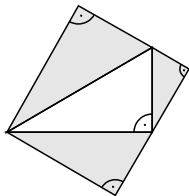


Figure: Obsah dvoch menších trojuholníkov sa rovná obsahu trojuholníka nad preponou.

Dôkaz Pytagorovej vety

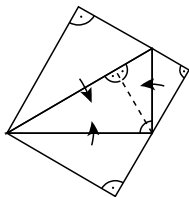


Figure: Obsah dvoch menších trojuholníkov sa rovná obsahu trojuholníka nad preponou.

Viacrozmerné priestory

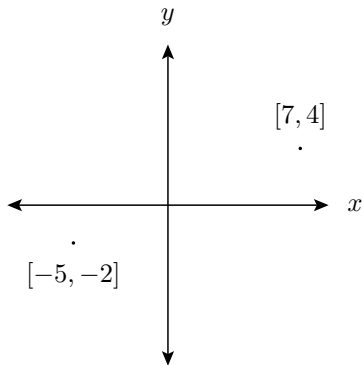
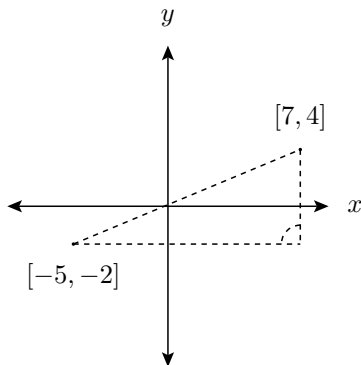


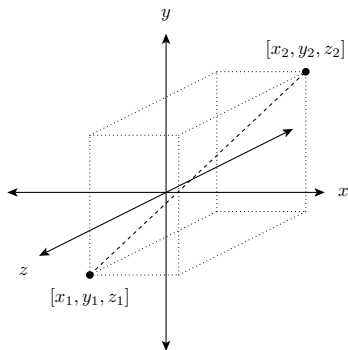
Figure: Descartesovi vďačíme za ďalšiu abstrakciu: súradnice.
Vzdialenosť dvoch bodov?

Využitie Pytagorovej vety



Vzdialenosť medzi (x_1, y_1) a (x_2, y_2) je

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Vzdialenosť medzi (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) je

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

- súradnice $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- vzdialenosť medzi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

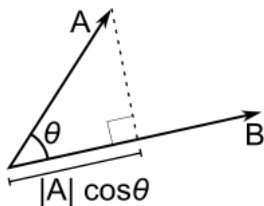


Figure: Skalárny súčin vektorov A a B .

$$(A, B) = |A| \cdot |B| \cdot \cos(\theta)$$

$$(A, B) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

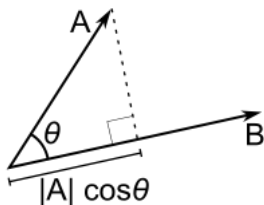


Figure: Skalárny súčin vektorov A a B .

$$(A, B) = |A| \cdot |B| \cdot \cos(\theta)$$

$$(A, B) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

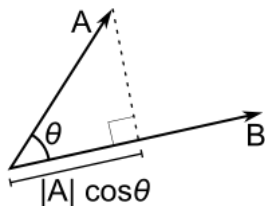


Figure: Skalárny súčin vektorov A a B .

- Vo všeobecnosti, skalárny súčin medzi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ je

$$(X, Y) = |X| \cdot |Y| \cdot \cos(\theta)$$

$$(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_i x_i y_i.$$

$$(x, y) = (y, x)$$

$$(ax, y) = a(x, y)$$

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$f(x, y) = f(y, x)$$

$$f(ax, y) = af(x, y)$$

$$f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$$

- Každú funkciu f spĺňajúcu tieto podmienky voláme *skalárny súčin*.

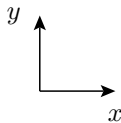
- Hodnota (x, x) je dĺžka x na druhú, teda $|x|^2$.
- Ak $(x, y) = 0$, hovoríme, že x a y sú kolmé.
- Vo všeobecnosti môžeme definovať uhol medzi x a y :

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

Zmena súradnicovej sústavy

- $[2, 3]$



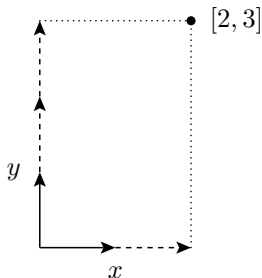


Figure: Bod má súradnice $[2, 3]$, t.j. dostaneme sa tam, ak spravíme 2 kroky v smere x a 3 kroky v smere y .

• $[2, 3]$

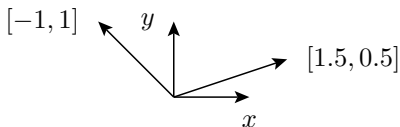


Figure: Aké súradnice má bod $[2, 3]$ v novej súradnicovej sústave?

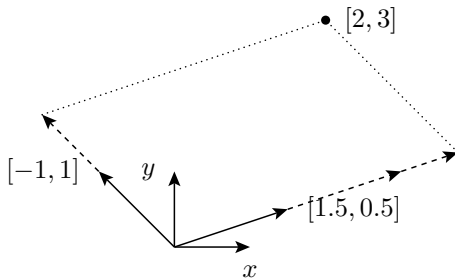


Figure: Do bodu $[2, 3]$ sa dostaneme, ak spravíme k krokov v smere $[1.5, 0.5]$ a ℓ krokov v smere $[-1, 1]$.

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \cdot k + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \ell = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot k = 5, \quad k = 2.5$$

$$1.5 \cdot 2.5 - \ell = 2, \quad \ell = 1.75$$

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \cdot k + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \ell = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot k = 5, \quad k = 2.5$$

$$1.5 \cdot 2.5 - \ell = 2, \quad \ell = 1.75$$

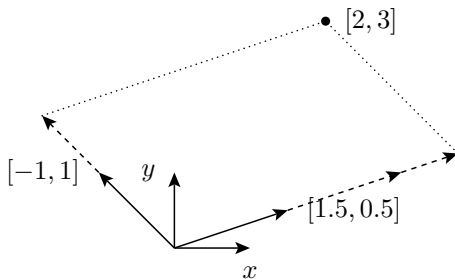


Figure: Do bodu $[2, 3]$ sa dostaneme, ak spravíme 2.5 kroku v smere $[1.5, 0.5]$ a 1.75 kroku v smere $[-1, 1]$.

- $[2, 3]$

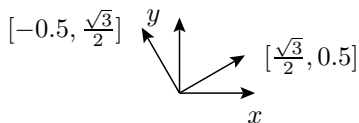


Figure: Aké súradnice má bod $[2, 3]$ v tejto súradnicovej sústave?

Ešte iná súradnicová sústava

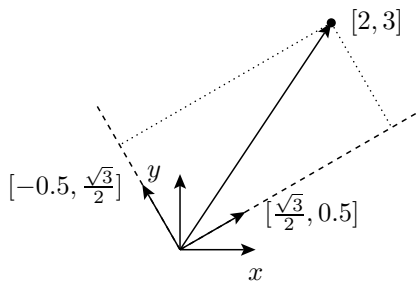


Figure: Stačí spočítať skalárny súčin!

Fourierove rady

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$f(x) = x \quad -\pi < x < \pi$$

$$f(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[0 \cdot \cos(nx) + 2 \cdot \frac{-1^{n+1}}{n} \sin(nx) \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- chceme funkciu zapísať pomocou násobkov $1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$
- chceme zistiť súradnice funkcie f v súradnicovej sústave s bázou $1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$
- Definujme si skalárny súčin na priestore funkcií:

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

- Aká je veľkosť jednotlivých bázových vektorov? Aké sú medzi nimi uhly?

- chceme funkciu zapísať pomocou násobkov $1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$
- chceme zistiť súradnice funkcie f v súradnicovej sústave s bázou $1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$
- Definujme si skalárny súčin na priestore funkcií:

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

- Aká je veľkosť jednotlivých bázových vektorov? Aké sú medzi nimi uhly?

- chceme funkciu zapísať pomocou násobkov $1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$
- chceme zistiť súradnice funkcie f v súradnicovej sústave s bázou $1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$
- Definujme si skalárny súčin na priestore funkcií:

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

- Aká je veľkosť jednotlivých bázových vektorov? Aké sú medzi nimi uhly?

JPEG a zmena súradnicovej sústavy



Figure: Sprava doľava rôzne stupne kompresie.

Ako funguje JPEG?

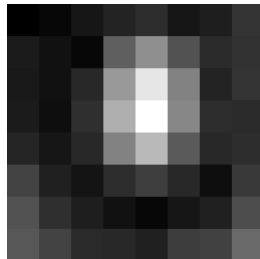
$$\begin{bmatrix} 52 & 55 & 61 & 66 & 70 & 61 & 64 & 73 \\ 63 & 59 & 55 & 90 & 109 & 85 & 69 & 72 \\ 62 & 59 & 68 & 113 & 144 & 104 & 66 & 73 \\ 63 & 58 & 71 & 122 & 154 & 106 & 70 & 69 \\ 67 & 61 & 68 & 104 & 126 & 88 & 68 & 70 \\ 79 & 65 & 60 & 70 & 77 & 68 & 58 & 75 \\ 85 & 71 & 64 & 59 & 55 & 61 & 65 & 83 \\ 87 & 79 & 69 & 68 & 65 & 76 & 78 & 94 \end{bmatrix} \cdot$$


Figure: Obrázok sa naseká na bloky 8×8 . Každý blok je vektor v 64-rozmernom priestore! Každá súradnica hovorí o stupni šedosti daného pixelu (0-255).

Štandardná súradnicová sústava

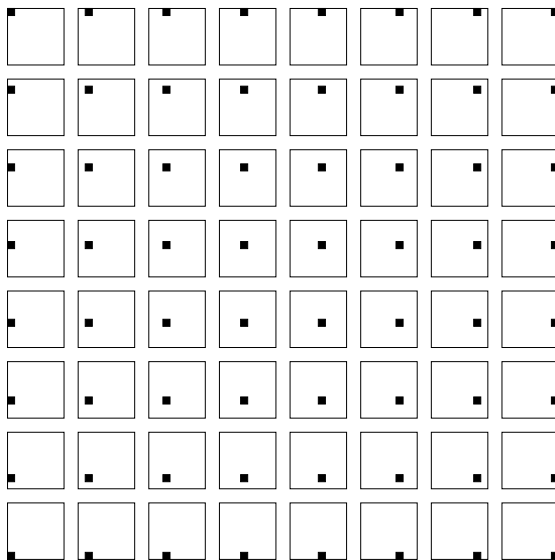
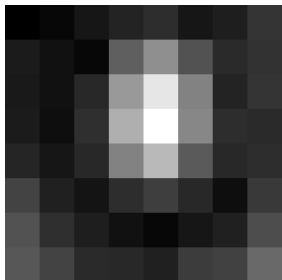
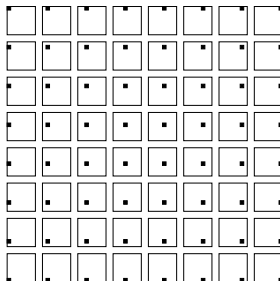


Figure: Štandardná súradnicová sústava.

Štandardná súradnicová sústava


$$\begin{bmatrix} 52 & 55 & 61 & 66 & 70 & 61 & 64 & 73 \\ 63 & 59 & 55 & 90 & 109 & 85 & 69 & 72 \\ 62 & 59 & 68 & 113 & 144 & 104 & 66 & 73 \\ 63 & 58 & 71 & 122 & 154 & 106 & 70 & 69 \\ 67 & 61 & 68 & 104 & 126 & 88 & 68 & 70 \\ 79 & 65 & 60 & 70 & 77 & 68 & 58 & 75 \\ 85 & 71 & 64 & 59 & 55 & 61 & 65 & 83 \\ 87 & 79 & 69 & 68 & 65 & 76 & 78 & 94 \end{bmatrix} \cdot$$


Lepšia súradnicová sústava

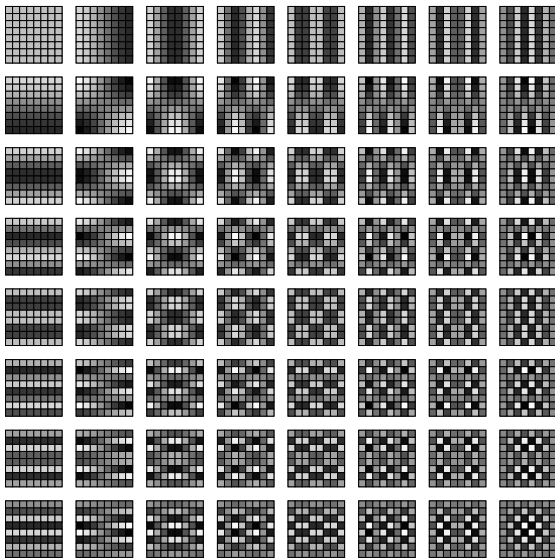


Figure: Súradnicová sústava používaná v JPEGu.

Ako funguje JPEG?

$$\begin{bmatrix} 52 & 55 & 61 & 66 & 70 & 61 & 64 & 73 \\ 63 & 59 & 55 & 90 & 109 & 85 & 69 & 72 \\ 62 & 59 & 68 & 113 & 144 & 104 & 66 & 73 \\ 63 & 58 & 71 & 122 & 154 & 106 & 70 & 69 \\ 67 & 61 & 68 & 104 & 126 & 88 & 68 & 70 \\ 79 & 65 & 60 & 70 & 77 & 68 & 58 & 75 \\ 85 & 71 & 64 & 59 & 55 & 61 & 65 & 83 \\ 87 & 79 & 69 & 68 & 65 & 76 & 78 & 94 \end{bmatrix}.$$

Figure: Pôvodný obrázok.

Ako funguje JPEG?

$$g = \begin{matrix} & & & x & & & & \\ & & & \longrightarrow & & & & \\ \begin{bmatrix} -76 & -73 & -67 & -62 & -58 & -67 & -64 & -55 \\ -65 & -69 & -73 & -38 & -19 & -43 & -59 & -56 \\ -66 & -69 & -60 & -15 & 16 & -24 & -62 & -55 \\ -65 & -70 & -57 & -6 & 26 & -22 & -58 & -59 \\ -61 & -67 & -60 & -24 & -2 & -40 & -60 & -58 \\ -49 & -63 & -68 & -58 & -51 & -60 & -70 & -53 \\ -43 & -57 & -64 & -69 & -73 & -67 & -63 & -45 \\ -41 & -49 & -59 & -60 & -63 & -52 & -50 & -34 \end{bmatrix} & & y. \\ & & & \downarrow & & & & \end{matrix}$$

Figure: Hodnoty posunieme o 128.

Ako funguje JPEG?

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} u \\ \longrightarrow \end{matrix} & \\ \begin{matrix} \left[\begin{array}{rrrrrrrr} -415.38 & -30.19 & -61.20 & 27.24 & 56.13 & -20.10 & -2.39 & 0.46 \\ 4.47 & -21.86 & -60.76 & 10.25 & 13.15 & -7.09 & -8.54 & 4.88 \\ -46.83 & 7.37 & 77.13 & -24.56 & -28.91 & 9.93 & 5.42 & -5.65 \\ -48.53 & 12.07 & 34.10 & -14.76 & -10.24 & 6.30 & 1.83 & 1.95 \\ 12.12 & -6.55 & -13.20 & -3.95 & -1.88 & 1.75 & -2.79 & 3.14 \\ -7.73 & 2.91 & 2.38 & -5.94 & -2.38 & 0.94 & 4.30 & 1.85 \\ -1.03 & 0.18 & 0.42 & -2.42 & -0.88 & -3.02 & 4.12 & -0.66 \\ -0.17 & 0.14 & -1.07 & -4.19 & -1.17 & -0.10 & 0.50 & 1.68 \end{array} \right] & \begin{matrix} \downarrow \\ v. \end{matrix} \end{matrix}$$

Figure: Prevedieme do novej súradnicovej sústavy (tzv. diskkrétne kosínusová transformácia).

$$Q = \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{bmatrix}.$$

Figure: Kvantizačná matica.

Ako funguje JPEG?

$$B = \begin{bmatrix} -26 & -3 & -6 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Figure: Všetky hodnoty vydelíme vhodnými konštantami (podľa stupňa kompresie) a zaokrúhlime (toto je jediné miesto, kde dochádza k strate informácie). Výsledný vektor sa už ľahko komprimuje.

Ako funguje JPEG?

$$\begin{bmatrix} -416 & -33 & -60 & 32 & 48 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -56 & 19 & 26 & 0 & 0 & 0 \\ -42 & 13 & 80 & -24 & -40 & 0 & 0 & 0 \\ -42 & 17 & 44 & -29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure: Pri dekódovaní postupujeme obrátene: hodnoty najskôr vynásobíme.

Ako funguje JPEG?

$$\begin{bmatrix} -66 & -63 & -71 & -68 & -56 & -65 & -68 & -46 \\ -71 & -73 & -72 & -46 & -20 & -41 & -66 & -57 \\ -70 & -78 & -68 & -17 & 20 & -14 & -61 & -63 \\ -63 & -73 & -62 & -8 & 27 & -14 & -60 & -58 \\ -58 & -65 & -61 & -27 & -6 & -40 & -68 & -50 \\ -57 & -57 & -64 & -58 & -48 & -66 & -72 & -47 \\ -53 & -46 & -61 & -74 & -65 & -63 & -61 & -45 \\ -47 & -34 & -53 & -74 & -60 & -47 & -47 & -41 \end{bmatrix}$$

Figure: Inverzná DCT.

Ako funguje JPEG?

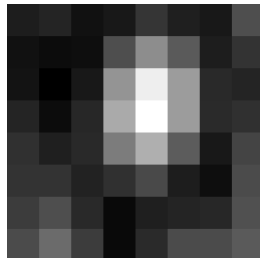
$$\begin{bmatrix} 62 & 65 & 57 & 60 & 72 & 63 & 60 & 82 \\ 57 & 55 & 56 & 82 & 108 & 87 & 62 & 71 \\ 58 & 50 & 60 & 111 & 148 & 114 & 67 & 64 \\ 65 & 55 & 66 & 120 & 155 & 114 & 68 & 70 \\ 70 & 63 & 67 & 101 & 122 & 88 & 60 & 78 \\ 71 & 71 & 64 & 70 & 80 & 62 & 56 & 81 \\ 75 & 82 & 67 & 54 & 63 & 65 & 66 & 83 \\ 81 & 95 & 75 & 54 & 68 & 81 & 81 & 87 \end{bmatrix} \cdot$$


Figure: Dekódovaný obrázok.

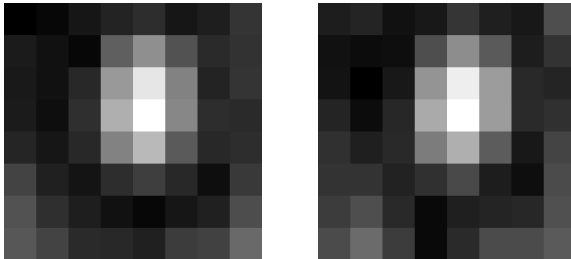


Figure: Porovnanie kódovaného a dekódovaného obrázku.

Čínska zvyšková veta a interpolácia polynómom

Počítame vojakov

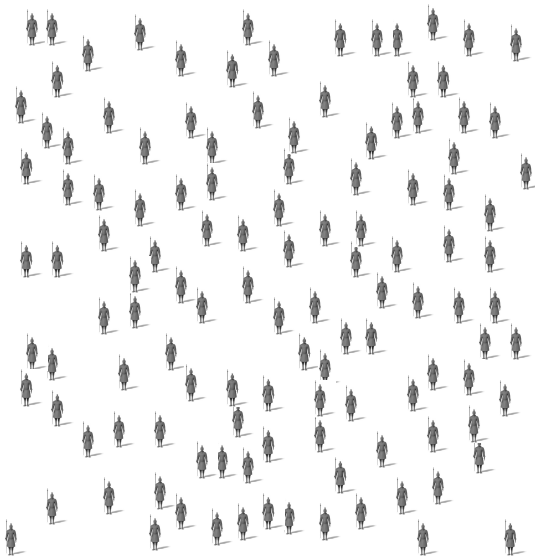


Figure: Koľko je na obrázku vojakov?

Počítame vojakov

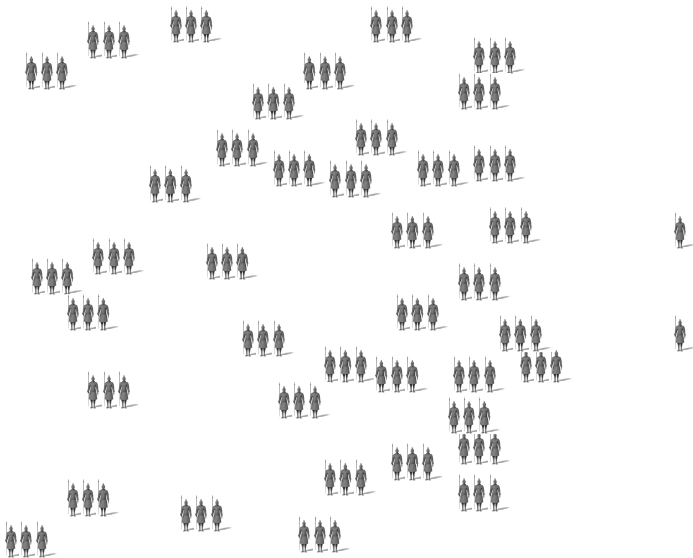


Figure: Ak sa zoradia do 3-jíc, 2-aja zostanú.

Počítame vojakov

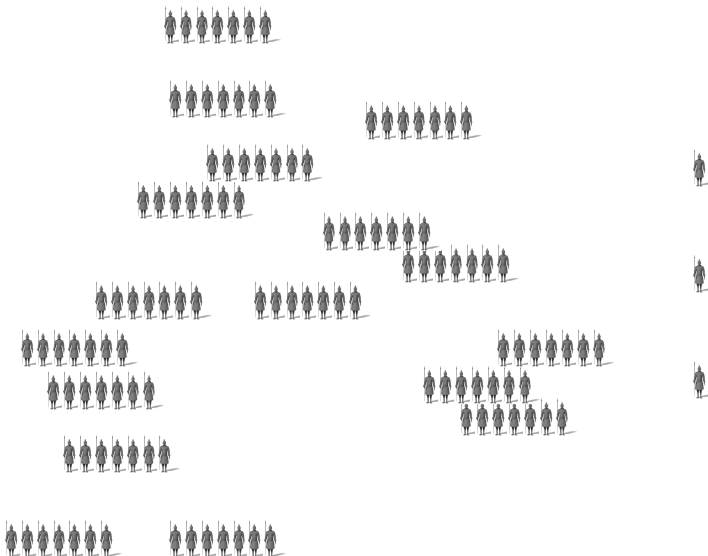


Figure: Ak sa zoradia do 7-míc, 3-aja ostanú.

Počítame vojakov

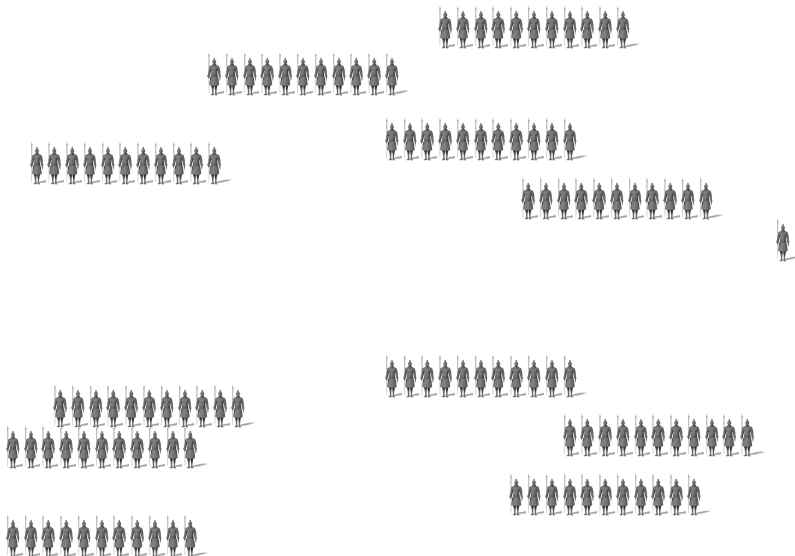


Figure: Ak sa zoradia do 11-tic, 1 ostane.

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$x = 3p + 2$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$x = 3p + 2$$

$$3p + 2 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$3p \equiv 1 \pmod{7}$$

$$p \equiv ? \pmod{7}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$x = 3p + 2$$

p	0	1	2	3	4	5	6
$3p \bmod 7$	0	3	6	2	5	1	4

$$3p \equiv 1 \pmod{7}$$

$$p \equiv 5 \pmod{7}$$

$$p = 7q + 5$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$x = 3(7q + 5) + 2 = 21q + 17$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$x = 3(7q + 5) + 2 = 21q + 17$$

$$21q + 17 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$10q + 6 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$10q \equiv -5 \equiv 6 \pmod{11}$$

$$q \equiv ? \pmod{11}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$x = 3(7q + 5) + 2 = 21q + 17$$

$$10q \equiv 6 \pmod{11}$$

$$q \equiv 5 \pmod{11}$$

$$q = 11r + 5$$

$$x = 21(11r + 5) + 17 = 231r + 122$$

Počítame vojakov

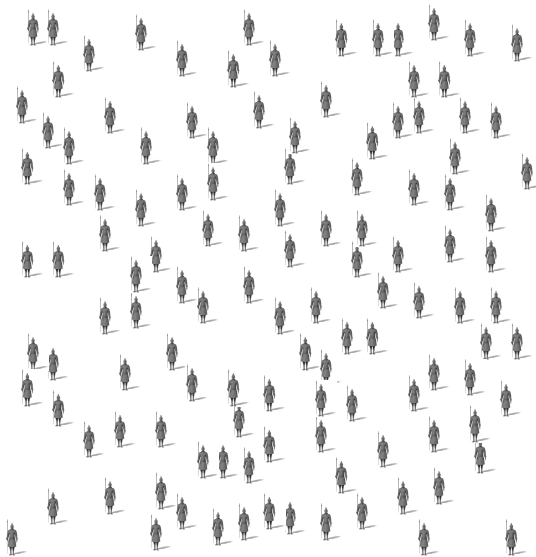


Figure: Vojakov je 122.

Theorem

Nech $m_1, m_2, \dots, m_k$ sú navzájom nesúdeliteľné, potom sústava

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

má riešenie, ktoré je jedinečné modulo $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$.

Interpolácia polynómom

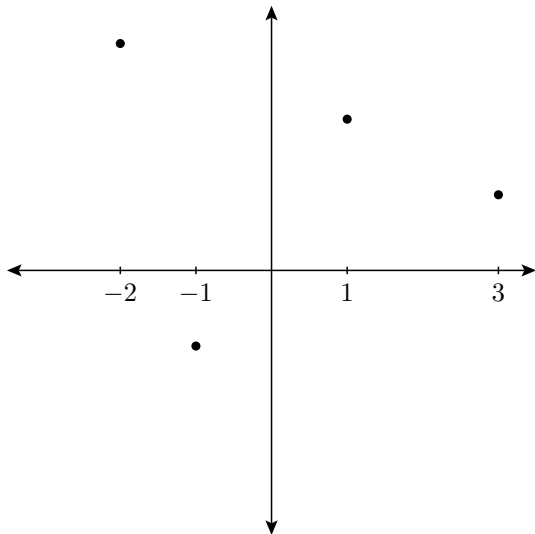


Figure: Je daných k bodov.

Interpolácia polynómom

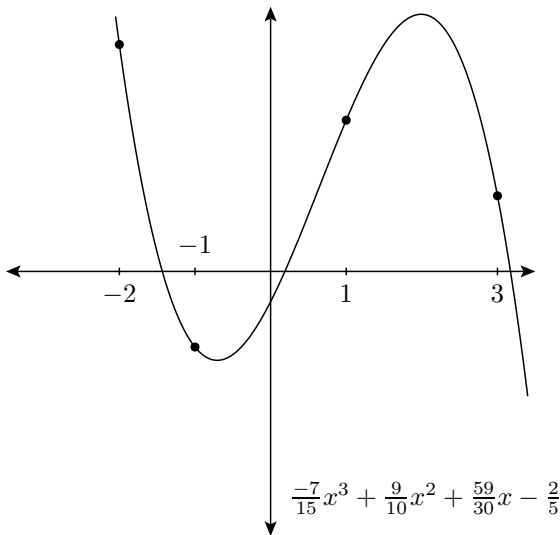


Figure: Nájdite polynóm (stupňa $k - 1$), ktorý prechádza cez dané body.

Interpolácia polynómom

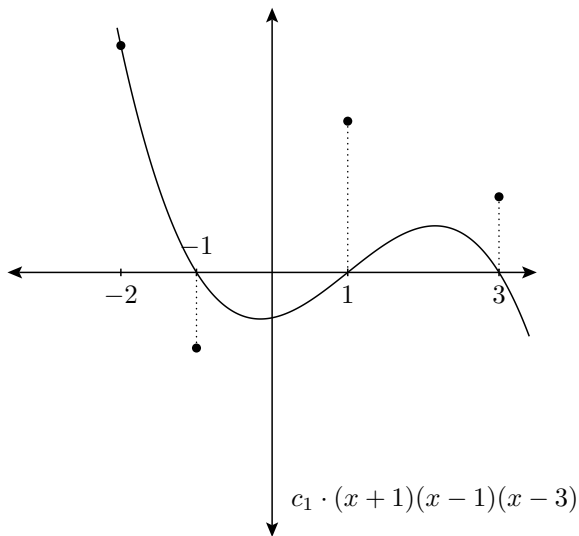


Figure:

Interpolácia polynómom

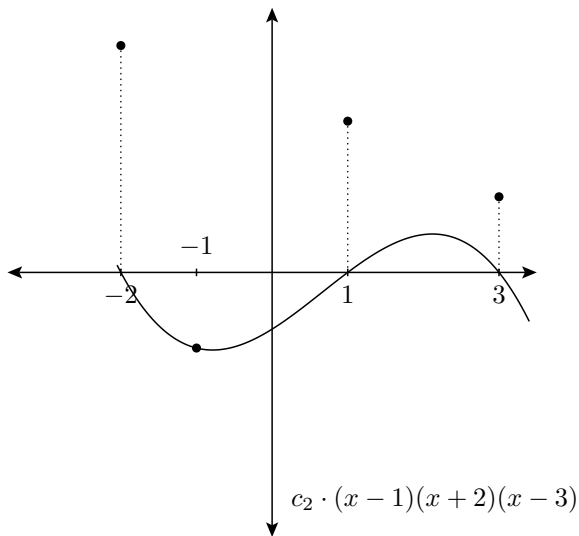


Figure:

Interpolácia polynómom

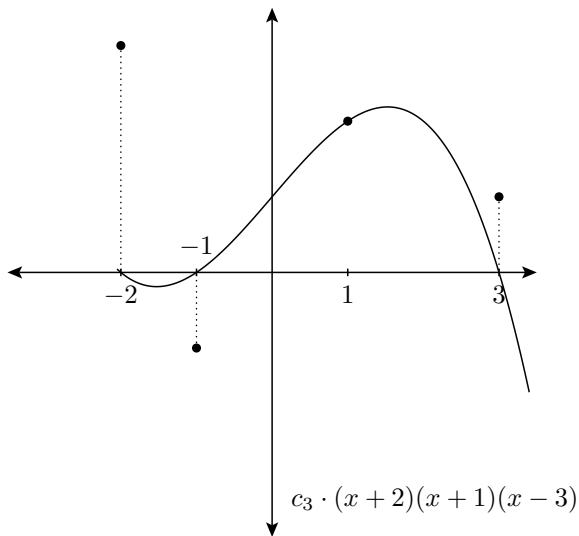


Figure:

Interpolácia polynómom

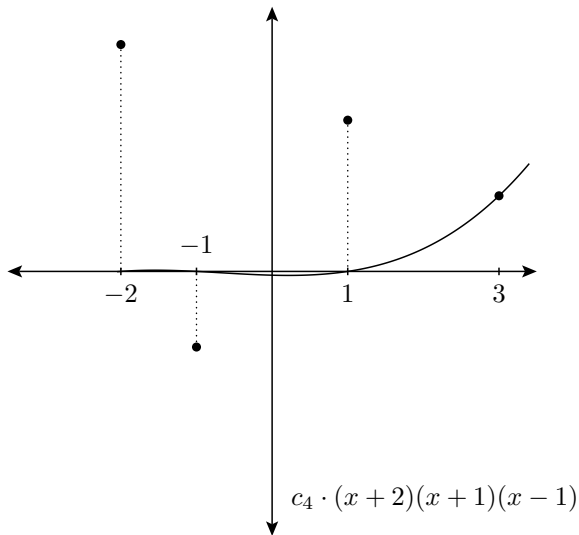


Figure:

Interpolácia polynómom

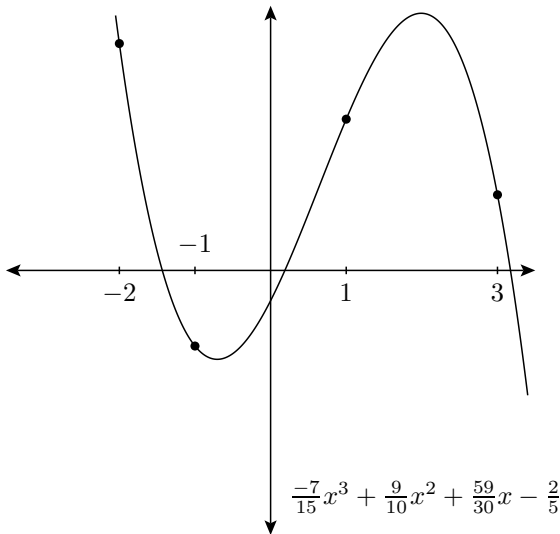


Figure:

Čo má spoločné ČZV a interpolácia polynómom?

Theorem

Nech $f(X)$ je polynóm. Potom zvyšok po delení $(X - a)$ je $f(a)$.

Proof.

$$f(X) = \underbrace{q(X)}_{\text{podiel}} \cdot (X - a) + \underbrace{R}_{\text{zvyšok}}$$

Stupeň zvyšku musí byť menší ako stupeň deliteľa $\Rightarrow R$ je konštanta (číslo). Dosadíme $X = a$:

$$f(a) = q(a) \cdot (a - a) + R = R$$



Čo má spoločné ČZV a interpolácia polynómom?

Hľadanie polynómu f prechádzajúceho bodmi

$[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_k, y_k]$ je ekvivalentné riešeniu sústavy

$$f(X) \equiv y_1 \pmod{(X - x_1)}$$

$$f(X) \equiv y_2 \pmod{(X - x_2)}$$

$$\vdots$$

$$f(X) \equiv y_k \pmod{(X - x_k)}$$

- niekedy dokáže abstrakcia veci zjednodušiť
 - ukázali sme jednoduchý dôkaz Pytagorovej vety a jedným vzorom sme dokázali aj Pappovu a Hippokratovu vetu
- všeobecnejšie výsledky majú širšie uplatnenie
 - na texty, obrázky aj funkcie sa dá pozeráť ako na vektory
 - občas je vhodné zmeniť súradnicovú sústavu (Fourierove rady, JPEG, MP3, rýchle násobenie)
- abstrakcia nám pomáha nájsť súvislosti aj tam, kde by sme ich nečakali
 - Čínska zvyšková veta a interpolácia?

- niekedy dokáže abstrakcia veci zjednodušiť
 - ukázali sme jednoduchý dôkaz Pytagorovej vety a jedným vrzom sme dokázali aj Pappovu a Hippokratovu vetu
- všeobecnejšie výsledky majú širšie uplatnenie
 - na texty, obrázky aj funkcie sa dá pozeráť ako na vektory
 - občas je vhodné zmeniť súradnicovú sústavu (Fourierove rady, JPEG, MP3, rýchle násobenie)
- abstrakcia nám pomáha nájsť súvislosti aj tam, kde by sme ich nečakali
 - Čínska zvyšková veta a interpolácia?

- niekedy dokáže abstrakcia veci zjednodušiť
 - ukázali sme jednoduchý dôkaz Pytagorovej vety a jedným vrzom sme dokázali aj Pappovu a Hippokratovu vetu
- všeobecnejšie výsledky majú širšie uplatnenie
 - na texty, obrázky aj funkcie sa dá pozeráť ako na vektory
 - občas je vhodné zmeniť súradnicovú sústavu (Fourierove rady, JPEG, MP3, rýchle násobenie)
- abstrakcia nám pomáha nájsť súvislosti aj tam, kde by sme ich nečakali
 - Čínska zvyšková veta a interpolácia?