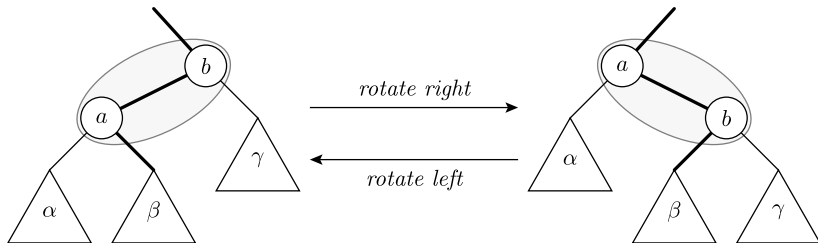


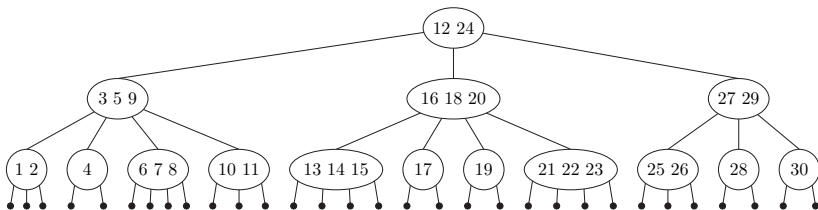
a-b-stromy

kuko

29.9.2020

Vybrané partie z datových štruktúr





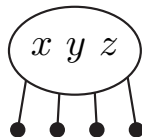
2-node

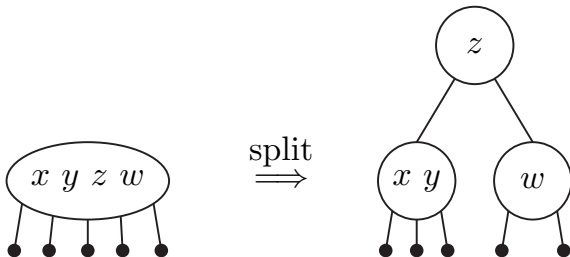


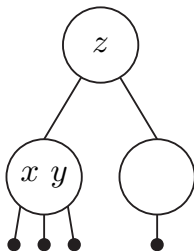
3-node



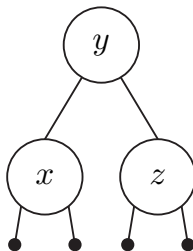
4-node

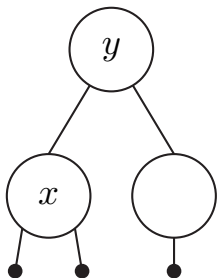






share
 $\Rightarrow$





join
 $\Rightarrow$



- (a, b) -strom pre $a \geq 2$, $b \geq 2a - 1$ je strom, kde
 - každý vrchol má $\leq b$ synov
 - každý vnútorný vrchol má $\geq a$ synov okrem koreňa, ktorý má ≥ 2 synov
 - všetky listy majú rovnakú hĺbku
 - vrchol s k kľúčmi $x_1, \dots, x_k$ má $k + 1$ podstromov $T_0, \dots, T_k$, pričom

$$T_0 \leq x_1 < T_1 \leq x_2 < \dots < T_{k-1} \leq x_k < T_k$$
- výška (a, b) -stromu je medzi $\Theta(\log_b n)$ a $\Theta(\log_a n)$

- (a, b) -strom pre $a \geq 2$, $b \geq 2a - 1$ je strom, kde
 - každý vrchol má $\leq b$ synov
 - každý vnútorný vrchol má $\geq a$ synov okrem koreňa, ktorý má ≥ 2 synov
 - všetky listy majú rovnakú hĺbku
 - vrchol s k kľúčmi $x_1, \dots, x_k$ má $k + 1$ podstromov $T_0, \dots, T_k$, pričom

$$T_0 \leq x_1 < T_1 \leq x_2 < \dots < T_{k-1} \leq x_k < T_k$$
- výška (a, b) -stromu je medzi $\Theta(\log_b n)$ a $\Theta(\log_a n)$

- (a, b) -strom pre $a \geq 2$, $b \geq 2a - 1$ je strom, kde
 - každý vrchol má $\leq b$ synov
 - každý vnútorný vrchol má $\geq a$ synov okrem koreňa, ktorý má ≥ 2 synov
 - všetky listy majú rovnakú hĺbku
 - vrchol s k kľúčmi $x_1, \dots, x_k$ má $k + 1$ podstromov $T_0, \dots, T_k$, pričom

$$T_0 \leq x_1 < T_1 \leq x_2 < \dots < T_{k-1} \leq x_k < T_k$$
- výška (a, b) -stromu je medzi $\Theta(\log_b n)$ a $\Theta(\log_a n)$

- (a, b) -strom pre $a \geq 2$, $b \geq 2a - 1$ je strom, kde
 - každý vrchol má $\leq b$ synov
 - každý vnútorný vrchol má $\geq a$ synov okrem koreňa, ktorý má ≥ 2 synov
 - všetky listy majú rovnakú hĺbku
 - vrchol s k kľúčmi $x_1, \dots, x_k$ má $k + 1$ podstromov $T_0, \dots, T_k$, pričom

$$T_0 \leq x_1 < T_1 \leq x_2 < \dots < T_{k-1} \leq x_k < T_k$$
- výška (a, b) -stromu je medzi $\Theta(\log_b n)$ a $\Theta(\log_a n)$

- (a, b) -strom pre $a \geq 2$, $b \geq 2a - 1$ je strom, kde
 - každý vrchol má $\leq b$ synov
 - každý vnútorný vrchol má $\geq a$ synov okrem koreňa, ktorý má ≥ 2 synov
 - všetky listy majú rovnakú hĺbku
 - vrchol s k kľúčmi $x_1, \dots, x_k$ má $k + 1$ podstromov $T_0, \dots, T_k$, pričom

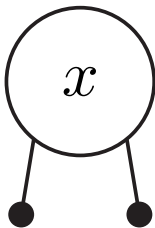
$$T_0 \leq x_1 < T_1 \leq x_2 < \dots < T_{k-1} \leq x_k < T_k$$
- výška (a, b) -stromu je medzi $\Theta(\log_b n)$ a $\Theta(\log_a n)$

- (a, b) -strom pre $a \geq 2$, $b \geq 2a - 1$ je strom, kde
 - každý vrchol má $\leq b$ synov
 - každý vnútorný vrchol má $\geq a$ synov okrem koreňa, ktorý má ≥ 2 synov
 - všetky listy majú rovnakú hĺbku
 - vrchol s k kľúčmi $x_1, \dots, x_k$ má $k + 1$ podstromov $T_0, \dots, T_k$, pričom

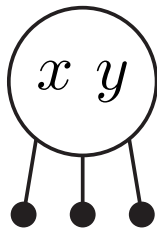
$$T_0 \leq x_1 < T_1 \leq x_2 < \dots < T_{k-1} \leq x_k < T_k$$
- výška (a, b) -stromu je medzi $\Theta(\log_b n)$ a $\Theta(\log_a n)$

2-3-stromy

2-node



3-node

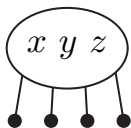


$$2^h - 1 \leq N < 3^h$$

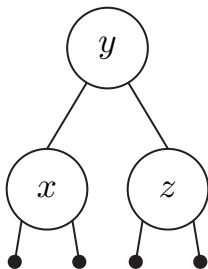
$$\log_3 N \leq h \leq \log_2 N + 1$$

$$2^h - 1 \leq N < 3^h$$

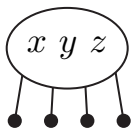
$$\log_3 N \leq h \leq \log_2 N + 1$$



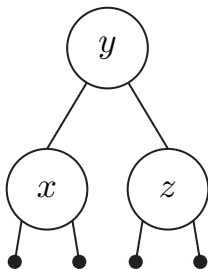
split
 $\Rightarrow$



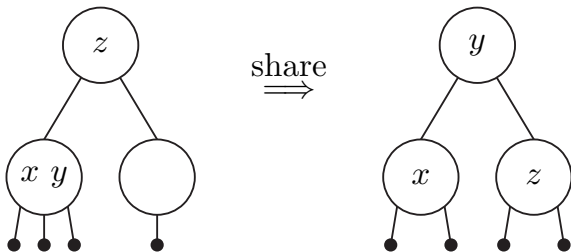
• $4 \Rightarrow 2+2$



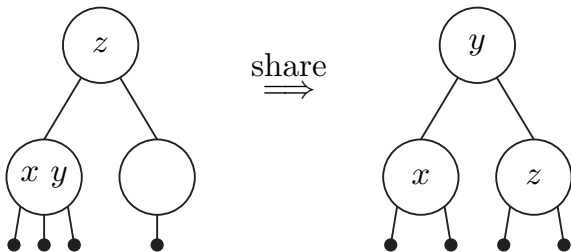
split
 $\Rightarrow$



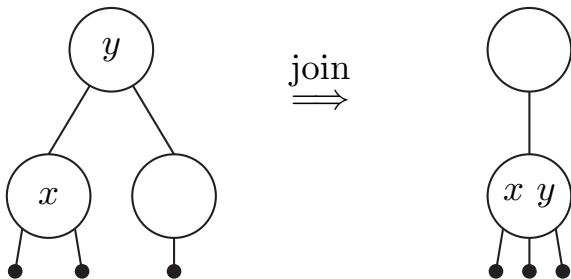
- $4 \Rightarrow 2 + 2$



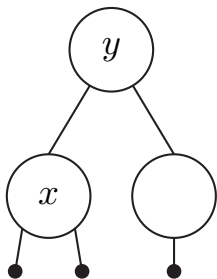
- $1 + 3 \Rightarrow 2 + 2$ (a koniec)



- $1 + 3 \Rightarrow 2 + 2$ (a koniec)



• $1 + 2 \Rightarrow 3$



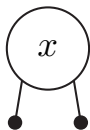
join
 $\Rightarrow$



- $1 + 2 \Rightarrow 3$

2-5-stromy

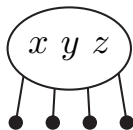
2-node



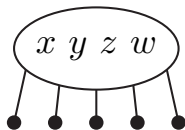
3-node

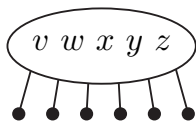


4-node

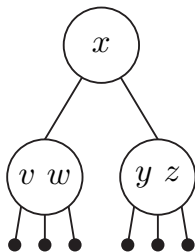


5-node

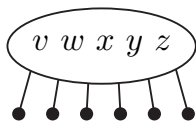




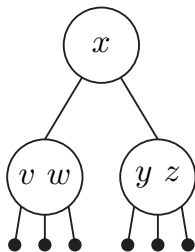
split
 $\Rightarrow$



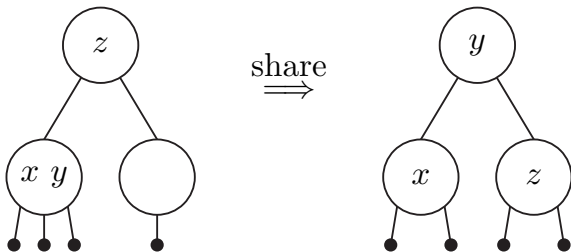
• $6 \Rightarrow 3 + 3$



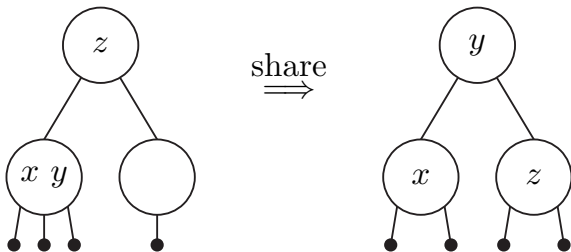
split
 $\Rightarrow$



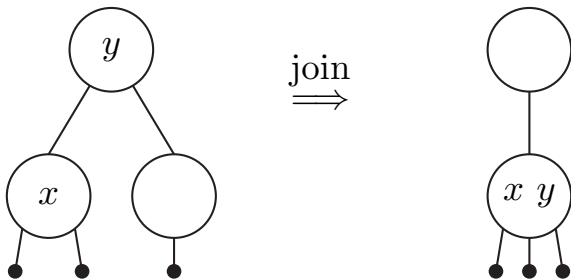
• $6 \Rightarrow 3 + 3$



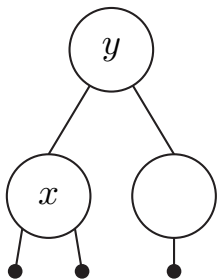
- $1 + (\geq 3) \implies 2 + (\geq 2)$ (a koniec)



- $1 + (\geq 3) \implies 2 + (\geq 2)$ (a koniec)



• $1 + 2 \Rightarrow 3$



join
 $\Rightarrow$



- $1 + 2 \Rightarrow 3$

2-vrcholy a 5-vrcholy sú „kritické“ (ak vymažeme/pridáme ešte jeden prvok, musíme ich riešiť)

2-node



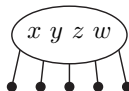
3-node



4-node



5-node



INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



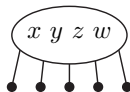
3-node



4-node



5-node



insert: stačí 1\$

- ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme vložili prvok do 5-vrcholu, pretečie, ale zaplatí si za svoj split
- celú kaskádu splitov si 5-vrcholy zaplatia sami z našetrených peňazí
- na konci ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



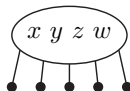
3-node



4-node



5-node



insert: stačí 1\$

- ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme vložili prvok do 5-vrcholu, pretečie, ale zaplatí si za svoj split
- celú kaskádu splitov si 5-vrcholy zaplatia sami z našetrených peňazí
- na konci ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



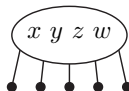
3-node



4-node



5-node



insert: stačí 1\$

- ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme vložili prvok do 5-vrcholu, pretečie, ale zaplatí si za svoj split
- celú kaskádu splitov si 5-vrcholy zaplatia sami z našetrených peňazí
- na konci ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



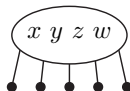
3-node



4-node



5-node



insert: stačí 1\$

- ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme vložili prvok do 5-vrcholu, pretečie, ale zaplatí si za svoj split
- celú kaskádu splitov si 5-vrcholy zaplatia sami z našetrených peňazí
- na konci ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



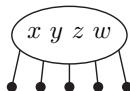
3-node



4-node



5-node



insert: stačí 1\$

- ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme vložili prvok do 5-vrcholu, pretečie, ale zaplatí si za svoj split
- celú kaskádu splitov si 5-vrcholy zaplatia sami z našetrených peňazí
- na konci ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



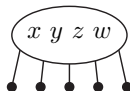
3-node



4-node



5-node



insert: stačí 1\$

- ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme vložili prvok do 5-vrcholu, pretečie, ale zaplatí si za svoj split
- celú kaskádu splitov si 5-vrcholy zaplatia sami z našetrených peňazí
- na konci ak vytvoríme nový 5-vrchol, vložíme mu na účet 1\$

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



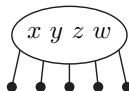
3-node



4-node



5-node



delete: stačia 2\$

- ak vytvoríme nový 2-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme mazali prvok z 2-vrcholu, podtečie a môže vzniknúť kaskáda joinov
- každý join/share vieme zaplatiť z našetrených peňazí
- posledný join môže vytvoriť nový 2-vrchol, respektíve share môže vytvoriť 2 nové 2-vrcholy – tým vložíme po 1\$ na účet

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



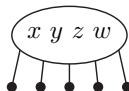
3-node



4-node



5-node



delete: stačia 2\$

- ak vytvoríme nový 2-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme mazali prvok z 2-vrcholu, podtečie a môže vzniknúť kaskáda joinov
- každý join/share vieme zaplatiť z našetrených peňazí
- posledný join môže vytvoriť nový 2-vrchol, respektíve share môže vytvoriť 2 nové 2-vrcholy – tým vložíme po 1\$ na účet

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



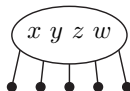
3-node



4-node



5-node



delete: stačia 2\$

- ak vytvoríme nový 2-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme mazali prvok z 2-vrcholu, podtečie a môže vzniknúť kaskáda joinov
- každý join/share vieme zaplatiť z našetrených peňazí
- posledný join môže vytvoriť nový 2-vrchol, respektíve share môže vytvoriť 2 nové 2-vrcholy – tým vložíme po 1\$ na účet

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



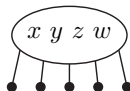
3-node



4-node



5-node



delete: stačia 2\$

- ak vytvoríme nový 2-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme mazali prvok z 2-vrcholu, podtečie a môže vzniknúť kaskáda joinov
- každý join/share vieme zaplatiť z našetrených peňazí
- posledný join môže vytvoriť nový 2-vrchol, respektíve share môže vytvoriť 2 nové 2-vrcholy – tým vložíme po 1\$ na účet

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 5-vrchol má ušetrený 1\$

2-node



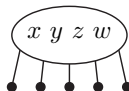
3-node



4-node



5-node



delete: stačia 2\$

- ak vytvoríme nový 2-vrchol, vložíme mu na účet 1\$
- ak sme mazali prvok z 2-vrcholu, podtečie a môže vzniknúť kaskáda joinov
- každý join/share vieme zaplatiť z našetrených peňazí
- posledný join môže vytvoriť nový 2-vrchol, respektíve share môže vytvoriť 2 nové 2-vrcholy – tým vložíme po 1\$ na účet

$$\Phi(T) = \#2\text{-vrcholov} + \#5\text{-vrcholov}$$

insert, ktorý spraví k splitov zníži $\#5\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 2-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme 1 nový 5-vrchol

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 1$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 1 split

delete, ktorý spraví k joinov/splitov zníži $\#2\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 5-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme najviac 2 nové 2-vrcholy

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 2$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 2 joiny/splity

$$\Phi(T) = \#2\text{-vrcholov} + \#5\text{-vrcholov}$$

insert, ktorý spraví k splitov zníži $\#5\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 2-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme 1 nový 5-vrchol

⇒ zmena potenciálu je $-k + 1$

⇒ amortizovane spravíme najviac 1 split

delete, ktorý spraví k joinov/splitov zníži $\#2\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 5-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme najviac 2 nové 2-vrcholy

⇒ zmena potenciálu je $-k + 2$

⇒ amortizovane spravíme najviac 2 joiny/splity

$$\Phi(T) = \#2\text{-vrcholov} + \#5\text{-vrcholov}$$

insert, ktorý spraví k splitov zníži $\#5\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 2-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme 1 nový 5-vrchol

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 1$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 1 split

delete, ktorý spraví k joinov/splitov zníži $\#2\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 5-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme najviac 2 nové 2-vrcholy

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 2$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 2 joiny/splity

$$\Phi(T) = \#2\text{-vrcholov} + \#5\text{-vrcholov}$$

insert, ktorý spraví k splitov zníži $\#5\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 2-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme 1 nový 5-vrchol

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 1$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 1 split

delete, ktorý spraví k joinov/splitov zníži $\#2\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 5-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme najviac 2 nové 2-vrcholy

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 2$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 2 joiny/splity

$$\Phi(T) = \#2\text{-vrcholov} + \#5\text{-vrcholov}$$

insert, ktorý spraví k splitov zníži $\#5\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 2-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme 1 nový 5-vrchol

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 1$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 1 split

delete, ktorý spraví k joinov/splitov zníži $\#2\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 5-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme najviac 2 nové 2-vrcholy

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 2$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 2 joiny/splity

$$\Phi(T) = \#2\text{-vrcholov} + \#5\text{-vrcholov}$$

insert, ktorý spraví k splitov zníži $\#5\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 2-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme 1 nový 5-vrchol

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 1$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 1 split

delete, ktorý spraví k joinov/splitov zníži $\#2\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 5-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme najviac 2 nové 2-vrcholy

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 2$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 2 joiny/splity

$$\Phi(T) = \#2\text{-vrcholov} + \#5\text{-vrcholov}$$

insert, ktorý spraví k splitov zníži $\#5\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 2-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme 1 nový 5-vrchol

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 1$

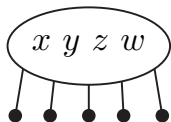
$\implies$ amortizovane spravíme najviac 1 split

delete, ktorý spraví k joinov/splitov zníži $\#2\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 5-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme najviac 2 nové 2-vrcholy

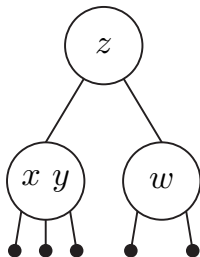
$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 2$

$\implies$ amortizovane spravíme najviac 2 joiny/splity

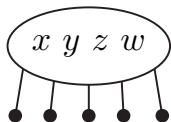
2-4-stromy



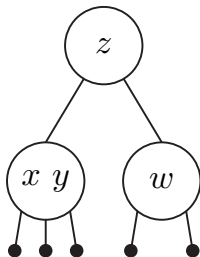
split
 $\Rightarrow$



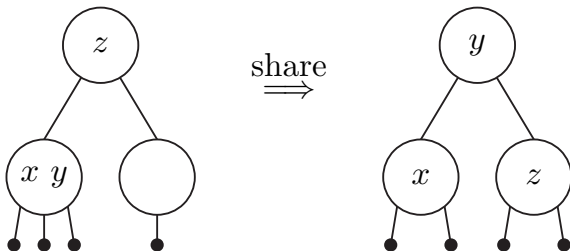
- $5 \Rightarrow 2+3$



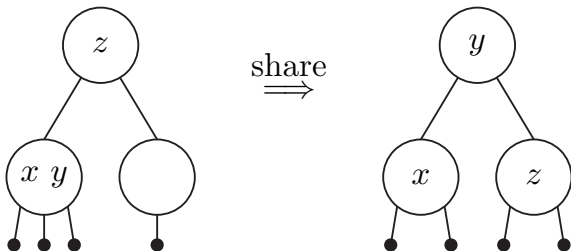
split
 $\Rightarrow$



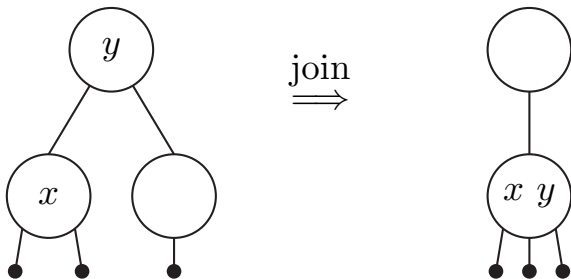
• $5 \Rightarrow 2+3$



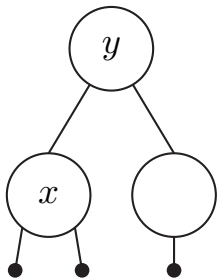
- $1 + (\geq 3) \implies 2 + (\geq 2)$ (a koniec)



- $1 + (\geq 3) \implies 2 + (\geq 2)$ (a koniec)



• $1 + 2 \Rightarrow 3$



join
 $\Rightarrow$



- $1 + 2 \Rightarrow 3$

2-vrcholy a 4-vrcholy sú „kritické“ (ak vymažeme/pridáme ešte jeden prvok, musíme ich riešiť)

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 4-vrchol má ušetrený 1\$???

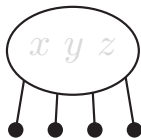
2-node



3-node



4-node



- split: $5 \implies 2 + 3$
- share: $1 + (\geq 3) \implies 2 + (\geq 2)$ (a koniec)
- join: $1 + 2 \implies 3$

2-vrcholy a 4-vrcholy sú „kritické“ (ak vymažeme/pridáme ešte jeden prvok, musíme ich riešiť)

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 4-vrchol má ušetrený 1\$???

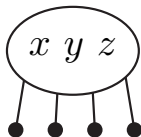
2-node



3-node



4-node



- split: $5 \implies 2 + 3$
- share: $1 + (\geq 3) \implies 2 + (\geq 2)$ (a koniec)
- join: $1 + 2 \implies 3$

2-vrcholy a 4-vrcholy sú „kritické“ (ak vymažeme/pridáme ešte jeden prvok, musíme ich riešiť)

INVARIANT: každý 2-vrchol a každý 4-vrchol má ušetrený 1\$???

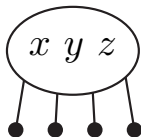
2-node



3-node



4-node



- split: $5 \implies 2 + 3$
- share: $1 + (\geq 3) \implies 2 + (\geq 2)$ (a koniec)
- join: $1 + 2 \implies 3$

INVARIANT: každý 2-vrchol má ušetřený 1\$ a každý 4-vrchol má ušetřené 2\$

$$\Phi(T) = \#2\text{-vrcholov} + 2 \times \#4\text{-vrcholov}$$

insert, ktorý spraví k splitov zníži $\#4\text{-vrcholov}$ o k a zvýši $\#2\text{-vrcholov}$ o k + možno vytvoríme 1 nový 4-vrchol

$\implies$ zmena potenciálu je $-2k + k + 2 = -k + 2$

$\implies$ amortizovane $O(1)$

delete, ktorý spraví k joinov/splitov zníži $\#2\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 4-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme najviac 2 nové 2-vrcholy

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 2$

$\implies$ amortizovane $O(1)$

$$\Phi(T) = \#2\text{-vrcholov} + 2 \times \#4\text{-vrcholov}$$

insert, ktorý spraví k splitov zníži $\#4\text{-vrcholov}$ o k a zvýši $\#2\text{-vrcholov}$ o k + možno vytvoríme 1 nový 4-vrchol

$\implies$ zmena potenciálu je $-2k + k + 2 = -k + 2$

$\implies$ amortizovane $O(1)$

delete, ktorý spraví k joinov/splitov zníži $\#2\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 4-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme najviac 2 nové 2-vrcholy

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 2$

$\implies$ amortizovane $O(1)$

$$\Phi(T) = \#2\text{-vrcholov} + 2 \times \#4\text{-vrcholov}$$

insert, ktorý spraví k splitov zníži $\#4\text{-vrcholov}$ o k a zvýši $\#2\text{-vrcholov}$ o k + možno vytvoríme 1 nový 4-vrchol

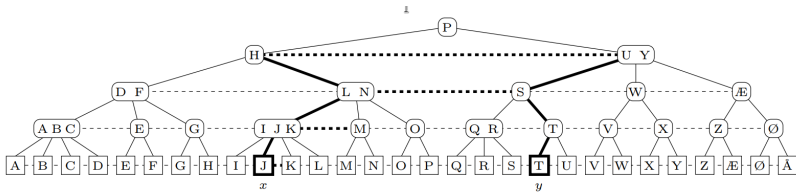
$\implies$ zmena potenciálu je $-2k + k + 2 = -k + 2$

$\implies$ amortizovane $O(1)$

delete, ktorý spraví k joinov/splitov zníži $\#2\text{-vrcholov}$ o k a žiadne 4-vrcholy nevytvorí + možno vytvoríme najviac 2 nové 2-vrcholy

$\implies$ zmena potenciálu je $-k + 2$

$\implies$ amortizovane $O(1)$



find	$O(\log n)$
insert	$O(\log n)$
delete	$O(\log n)$